

宇宙プラズマ研究のための ジャイロ運動論的コードGKVの拡張と オーロラ現象への応用

藤田慶二

研究部セミナー
2025年8月29日

発表の概要

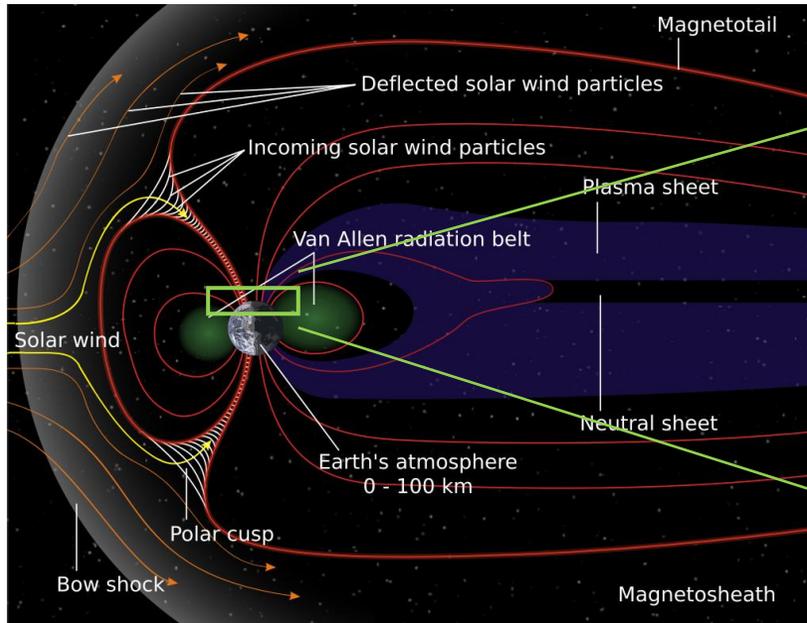
- 宇宙プラズマシミュレーションのために、核融合プラズマの研究に用いられてきたジャイロ運動論的コードGKVの拡張を行っている。
- 具体的には
 1. 磁気圏-電離層結合系を解析するための、ジャイロ運動論モデルの整備
 2. 非線形加速項の導入
 3. 非Maxwellian背景分布の導入
- 1, 2を中心にこれまでの進展を紹介し、核融合研究との関連も交えて、今後の展望を議論する。

内容

1. 研究背景
2. ジャイロ運動論的M-I結合モデルと計算例
3. 非線形加速項の導入
4. カッパ分布の導入
5. 相空間ホールの解析
6. まとめと今後の展望

1. 研究背景：適用対象としての磁気圏

磁気圏 (Magnetosphere)



電離層 (Ionosphere)



惑星の固有磁場の影響が支配的な領域

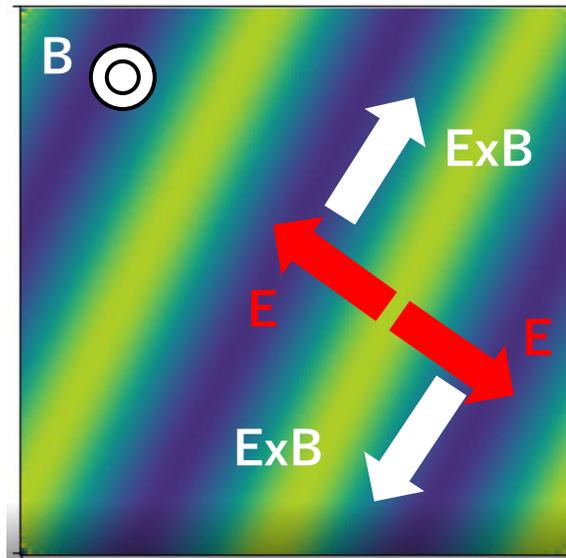
(画像：NASA)

- オーロラは、主に無衝突な完全電離プラズマとみなせる磁気圏プラズマと、中性大気との衝突が支配的な大気上部—電離層—の弱電離プラズマの相互作用により生じる。
- オーロラと関係する現象の統一的な理解のためには、これら二つの系を結合した系—M-I結合系—を考える必要がある（磁場配位と境界条件の設定）。

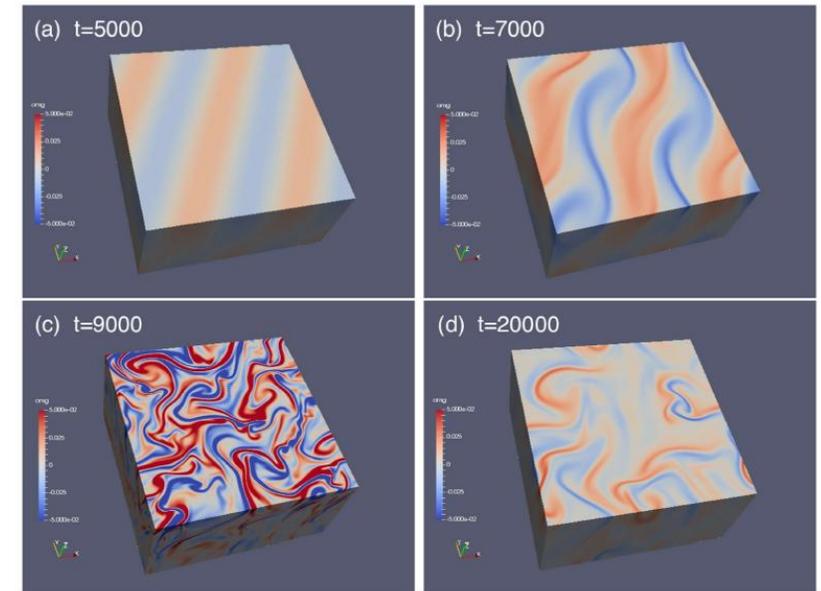
1. 研究背景：先行研究

■先行研究

- Alfvén波を介した磁気圏-電離層（M-I）結合系で起こる**フィードバック不安定性**と呼ばれる不安定性により，アークと電流系が同時に発達することが議論されてきた。
- [Watanabe \(2010\)](#), [Watanabe et al. \(2016\)](#) による簡約化磁気流体（reduced MHD）モデルを用いた非線形シミュレーションの結果，フィードバック不安定性に加え，Kelvin-Helmholtz（K-H）不安定性を通じた乱流状態への遷移過程が示される。



密度揺動の振幅増大→分極電場の成長→ExBドリフトシアの増大
→K-H不安定性の成長



電磁場のエネルギーの成長（上）と，渦度の成長（下） [[Watanabe et al. \(2016\)](#)] 5/33

1. 研究背景：先行研究

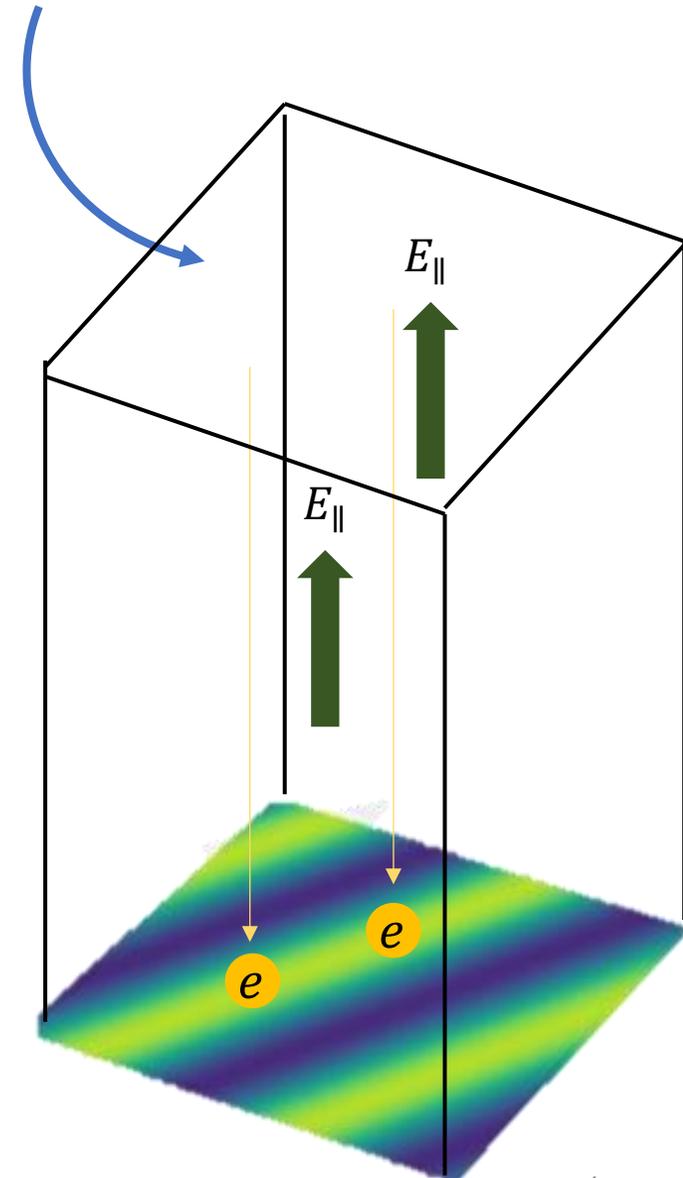
電子の加速まで統一的に扱いたい

■MHDモデルの限界

- しかし，理想MHD的モデルでは，オーロラ電子を加速させる E_{\parallel} が含まれない。
- オーロラを光らせる電子が，どのように加速されているのかは未だ未解明な重要問題
- 密度構造の成長と電子加速を統一的に扱うには，運動論的効果を含めるようモデルの拡張が必要。
- 粒子捕捉や加熱過程などを理解するためにも，速度分布の情報が必要。

■ジャイロ運動論モデルの構築

- [Watanabe \(2014\)](#)：M-I結合系のジャイロ運動論モデルの定式化
- [Nishimura & Numata \(2021\)](#)：線形なジャイロ運動論シミュレーションの実行



2. ジャイロ運動論的モデル：磁気圏方程式

- 一様直線なスラブ磁場配位 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{b}$, 温度 $T_e = T_i$ および密度 $n_{e0} = n_{i0}$ も一様定常
 \Rightarrow 磁気ドリフト, ミラー力, 反磁性ドリフトが不在
- 背景対流電場による $E \times B$ ドリフトに乗った系で計算。

磁気圏方程式

■ ジャイロ運動論的方程式

$$\frac{\partial \delta f_s}{\partial t} + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} \delta f_s + \mathbf{v}_E \cdot \nabla \delta f_s = -\frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{\parallel} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} + C_s - \nu_H \nabla_{\perp}^2 \delta f_s$$

(電子のみ)

■ Poisson方程式

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_s e_s \left[\int d^3 v \delta f_s J_{0s} - \frac{e_s n_s}{T_s} \phi (1 - \Gamma_{0s}) \right]$$

■ Ampère則

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -\mu_0 j_{\parallel} = -\mu_0 \sum_s \int d^3 v v_{\parallel} \delta f_s J_{0s}$$

δf_s : ジャイロ中心分布の揺動部分

ϕ : スカラーポテンシャル揺動,

ψ : ベクトルポテンシャル揺動の平行成分,

$\{A, B\} = \mathbf{b} \cdot (\nabla A \times \nabla B)$: Poisson括弧

$$\mathbf{v}_E \cdot \nabla f = \frac{1}{B_0} \{ \langle \phi \rangle_{\xi}, f \}$$

$$\nabla_{\parallel} f = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{B_0} \{ \langle \psi \rangle_{\xi}, f \}$$

$$\tilde{E} = -\nabla_{\parallel} \langle \phi \rangle_{\xi} - \frac{\partial \langle \psi \rangle_{\xi}}{\partial t}$$

J_{0s} : ゼロ次Bessel関数,

Γ_{0s} : ゼロ次変形Bessel関数

C_s : 衝突項

ν_H : Hyper-diffusion係数 (電子のみ)

2. ジャイロ運動論的モデル：電離層方程式

- 電離層では，中性大気との衝突が支配的な影響を持つ
- 電離層方程式には，二流体モデルを用いる：

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mathbf{v}_E \cdot \nabla_{\perp} n_e = \frac{j_{I\parallel}}{eh} + S$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot (\mu_P n_i \mathbf{E}_I - D_{\perp} \nabla n_i) = S$$

- $n_e = n_i = n_I$ および $S = -2\alpha n_{I0} \delta n_I$ として整理すると

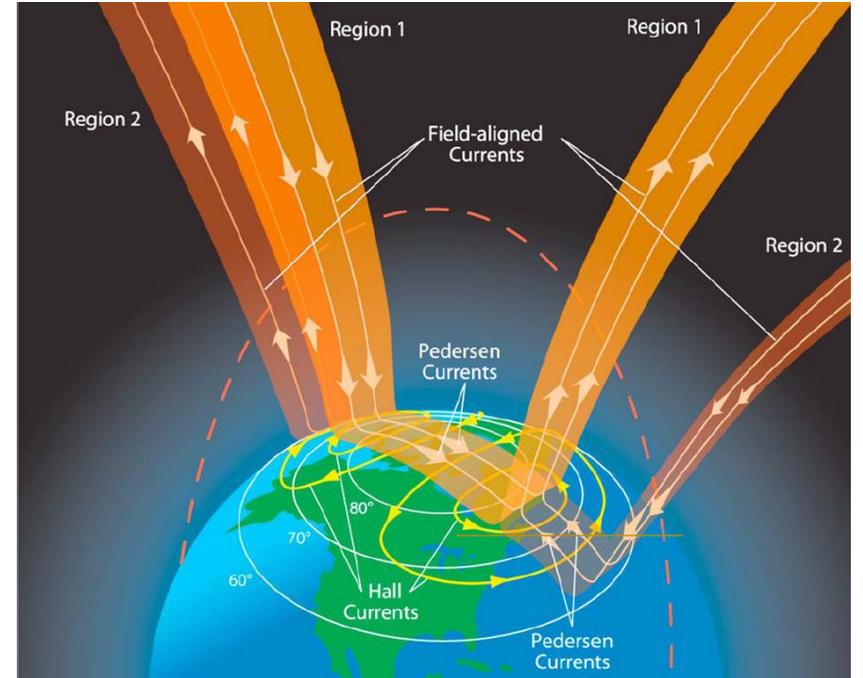
$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_I + \frac{1}{B_0} \{ \phi_I, \delta n_I \} = \frac{j_{I\parallel}}{eh} - 2\alpha n_{I0} \delta n_I$$

$$\nabla_{\perp} \cdot (\mu_P n_I \mathbf{E}_I) - \frac{\mathbf{E}_I \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \cdot \nabla_{\perp} \delta n_I - D_{\perp} \nabla_{\perp}^2 \delta n_I - \frac{j_{I\parallel}}{eh}$$

- ここで

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_{I0} - \nabla \phi_I, \quad j_{I\parallel} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla_{\perp}^2 \psi_I$$

- これらの二本の式には，三つの未知量： $\phi_I, \psi_I, \delta n_I$ が含まれる。



Slavin & Strangeway (2010) J. Geophys. Res. Space Phys.

n_I : 高度平均した密度,
 S : ソース項,
 α : 再結合係数,
 D_{\perp} : 拡散係数,
 h : 電離層高さ
 μ_P : Pederson移動度

2. ジャイロ運動論的モデル：M-I結合

■計算の流れ

1. 磁気圏計算

ジャイロ運動論的方程式の積分より $\Rightarrow \delta f$
Poisson方程式, Ampère則より $\Rightarrow \phi, \psi$

2. 磁気圏 \Rightarrow 電離層

磁気圏の下側境界 ($z = 0$) の ϕ を電離層に投影：

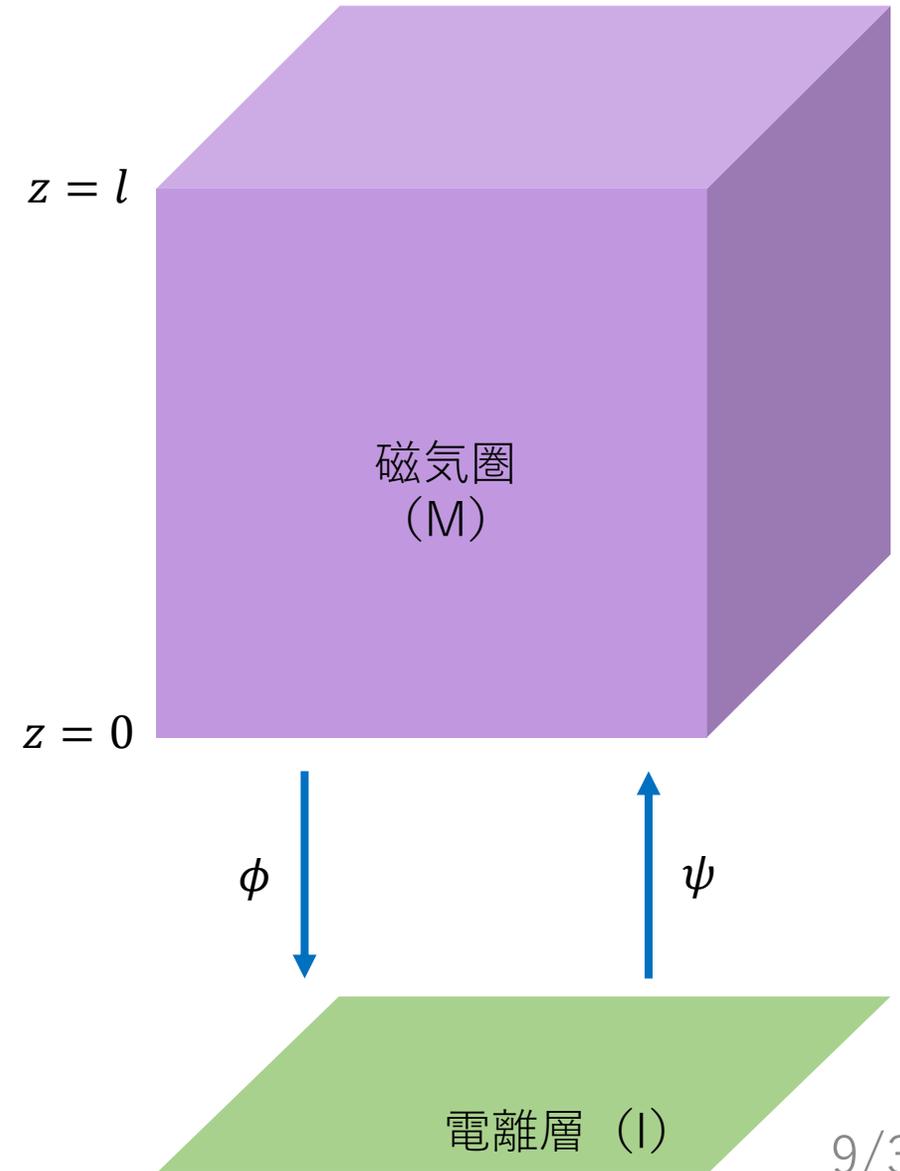
$$\phi_I = \phi \Big|_{z=0}$$

3. 電離層方程式計算

電流の連続性より $\Rightarrow j_{I\parallel} \Rightarrow \psi_I$

4. 電離層 \Rightarrow 磁気圏

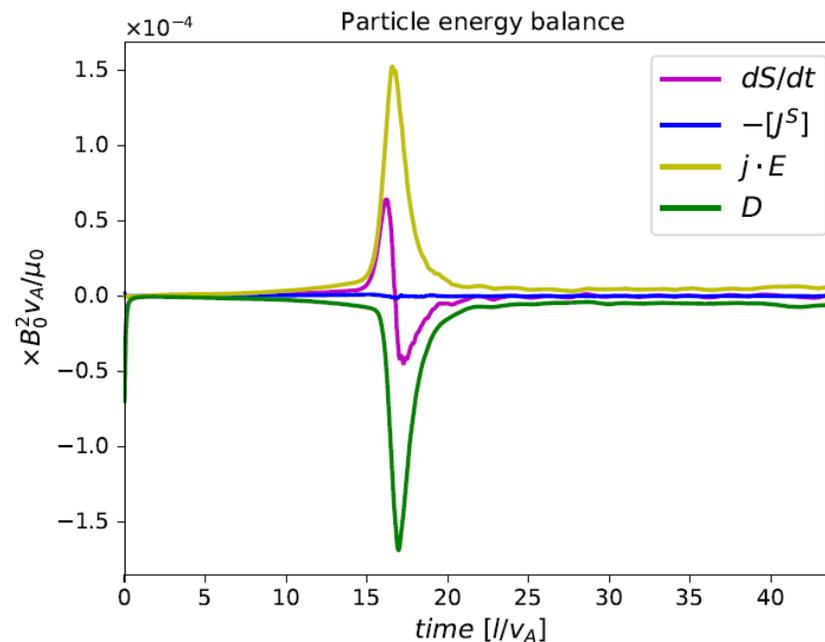
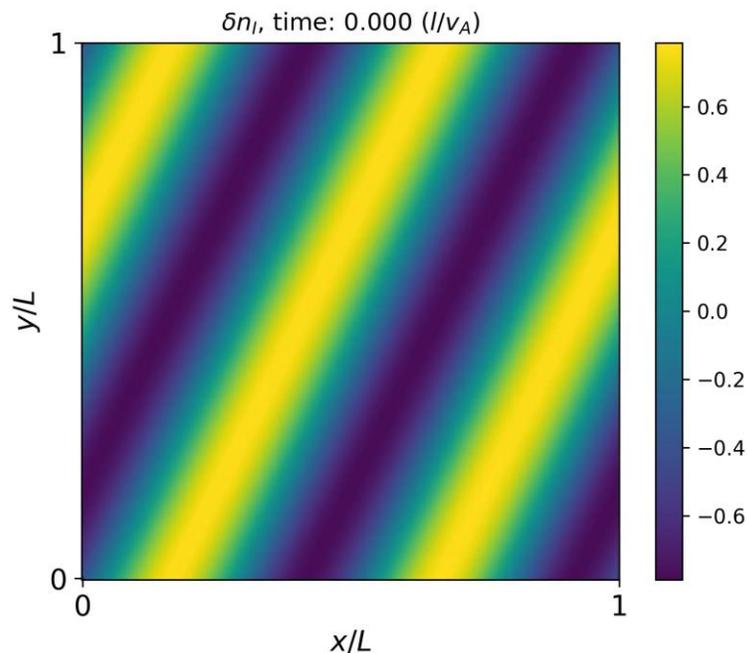
3と整合するよう、磁気圏下側境界の δf および ψ を補正



2. 計算例：波動粒子相互作用とオーロラ密度構造の非線形発展

■ シミュレーション結果

- フィードバック不安定性によるアーク構造の成長の後、磁気圏から伝播してきた不規則性が電離層密度構造にも表れ、乱流状態に移行する。
- $\int dz \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle > 0 \Rightarrow$ 場から粒子への正味のエネルギー転移。平行電場を介した相互作用による、波から粒子へのエネルギー転移が、特に非線形飽和フェーズにかけて大きな寄与をしていることが確認できる



S : エントロピー変数
 J_{\parallel}^S : エントロピーフラックス
 $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$: エネルギー交換
 D : 散逸

2. 計算例：分散性Alfvén波乱流

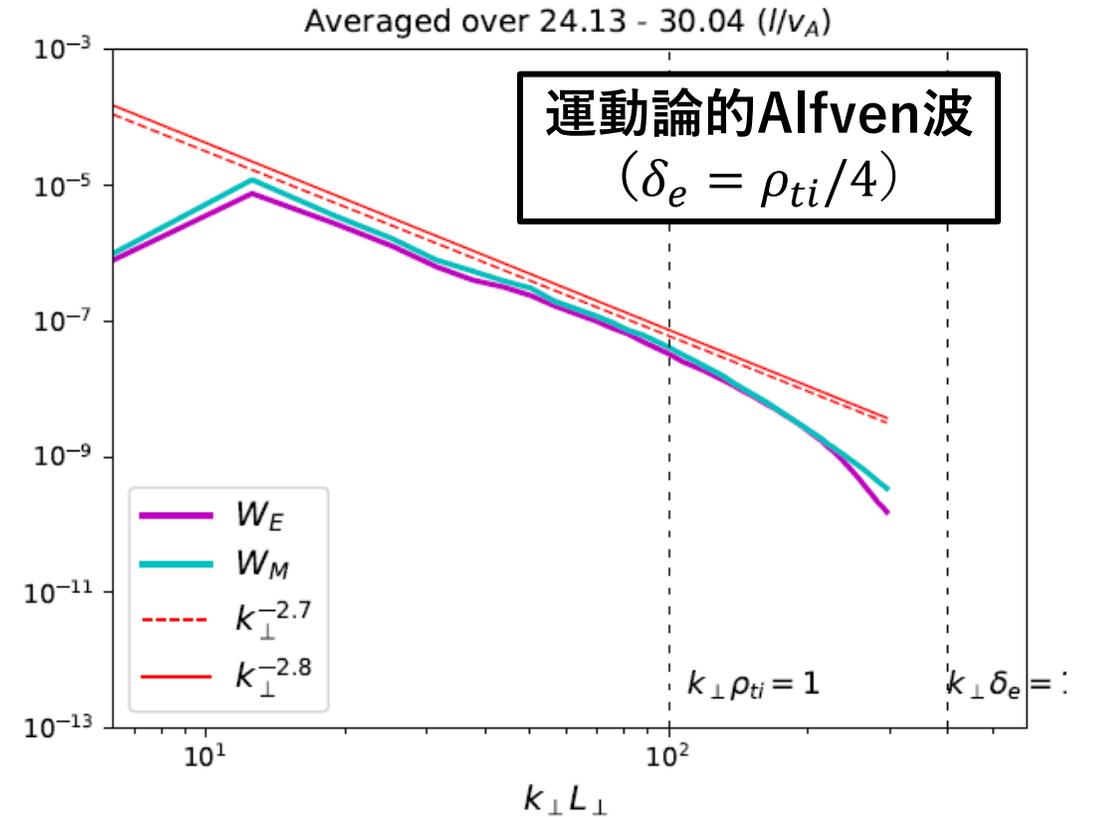
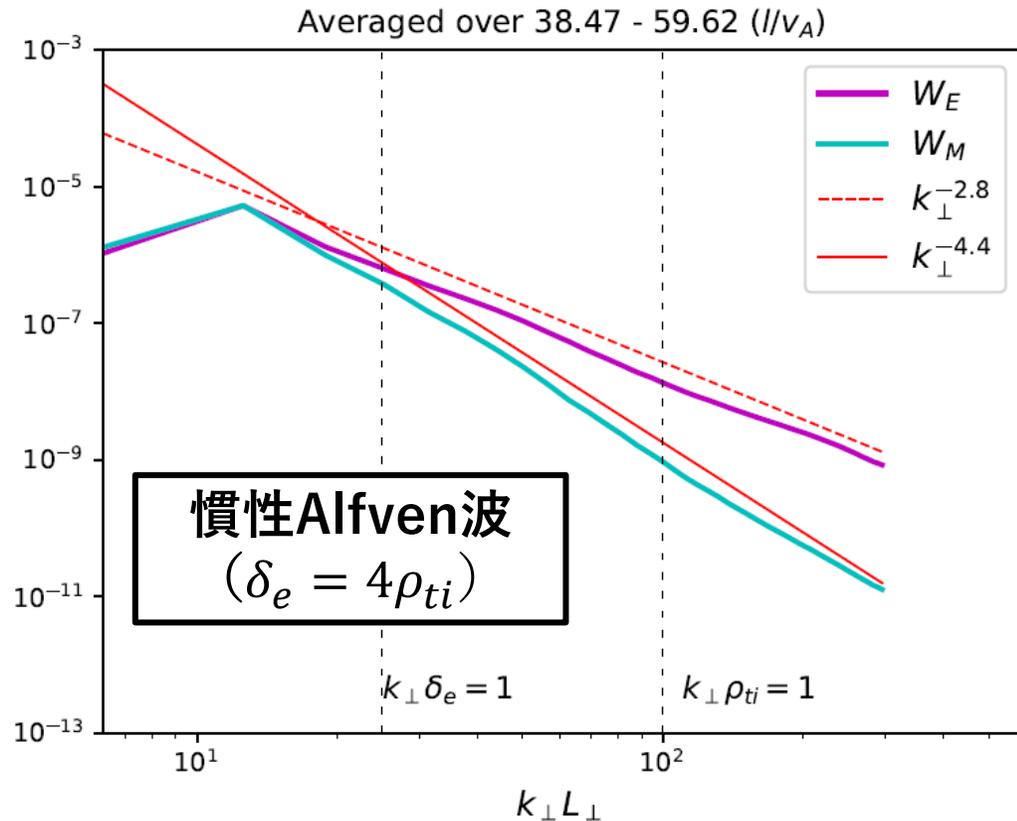
■ Alfvén波の分散関係

- MHDスケール ($k_{\perp}^2 \ll 1$) : $\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2$
- 運動論的スケール :

$$\omega^2 = \begin{cases} k_{\parallel}^2 v_A^2 \rho_{ti}^2 k_{\perp}^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) & \text{for } \beta \gg \frac{m_e}{m_i} \text{ or } v_A^2 \ll v_{te}^2 \\ \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{1 + \delta_e^2 k_{\perp}^2} & \text{for } \beta \ll \frac{m_e}{m_i} \text{ or } v_A^2 \gg v_{te}^2 \end{cases}$$

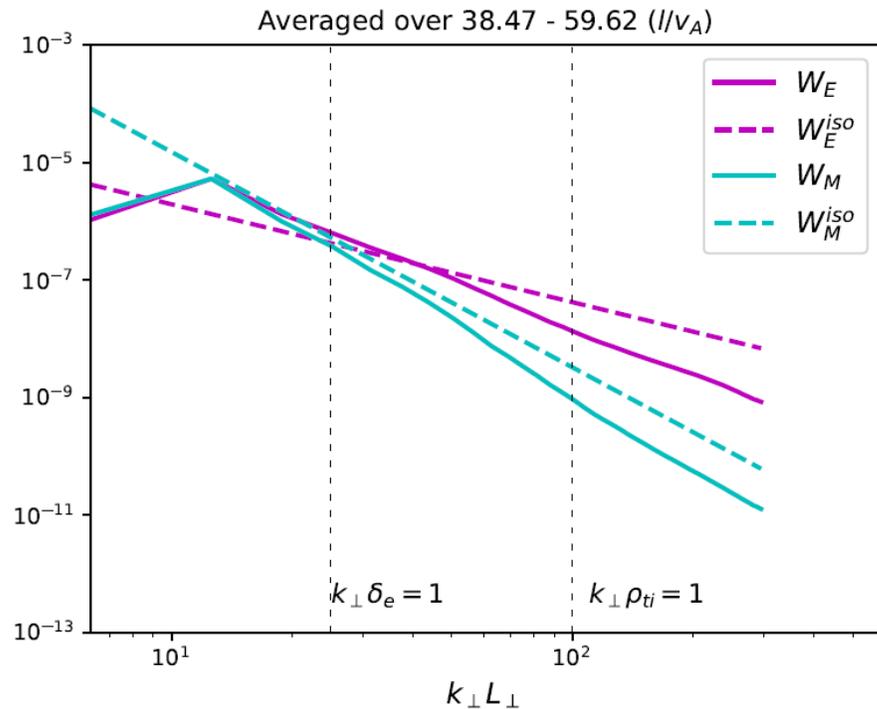
- 運動論的スケールにおいて、Alfvén波は、イオンLarmor半径 ρ_{ti} と電子慣性長 δ_e の相対的な大きさの比により、異なる性質を示す：
 $\delta_e \ll \rho_{ti}$ で運動論的Alfvén波に（太陽風やプラズマシートなど）、 $\delta_e \gg \rho_{ti}$ で慣性Alfvén波に（カスプや加速域など）。

2. 計算例：分散性Alfven波乱流

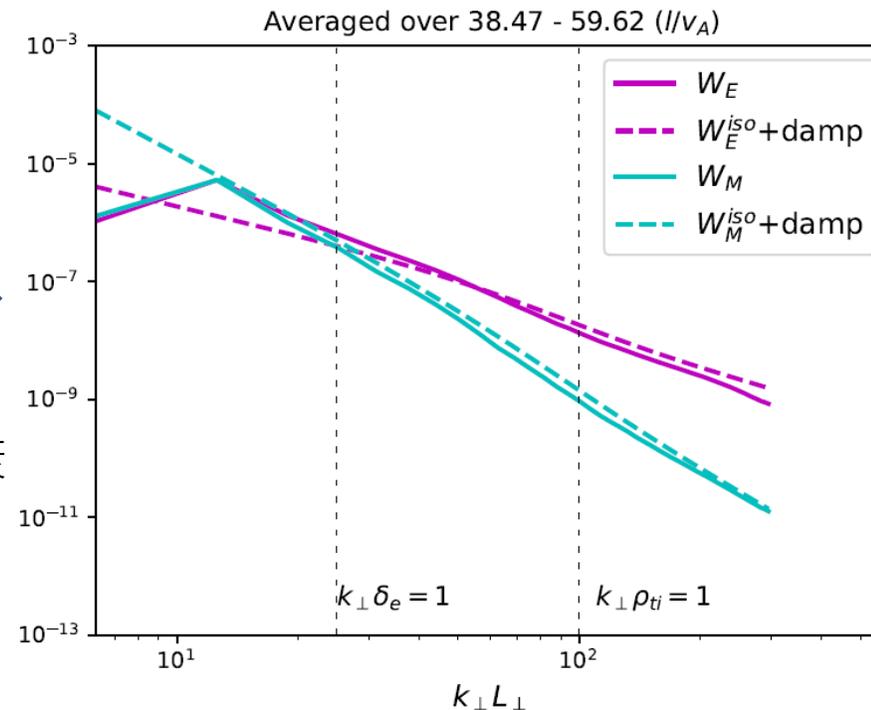


- 慣性極限に向かうにつれて、磁場のスペクトルが急峻になり静電的 ($W_E/W_M \gg 1$) になる。
- 慣性的なケースのスペクトルは、観測値に近い。

2. 計算例：分散性Alfven波乱流



Landau減衰



$k_{\perp} \delta_e > 1$ において、等温的な場合のスペクトルは

$$W_{Ek_{\perp}}^{iso} \propto k_{\perp}^{-5/3}, \quad W_{Mk_{\perp}}^{iso} \propto k_{\perp}^{-11/3}$$

シミュレーション結果のスペクトル指数は、

W_E^{iso} , W_M^{iso} のスペクトル指数 -1.7 および -3.7 よりも絶対値として大きい

等温的スペクトルにLandau減衰の効果を考慮に入れたスペクトル

$$W = W^{iso} \left(1 - \frac{2\gamma}{\omega} \right)$$

が、電子慣性スケール以下でのシミュレーションの結果とよく一致。

3. 非線形加速項の導入：オーダリングの再検討

- 以上の結果は、通常のジャイロ運動論的オーダリングに基づくモデルを用いたものの。
- この形式では $O(\epsilon^3)$ の項として無視されている速度空間非線形項あるいは**平行非線形項**

$$\frac{\partial \delta f_s}{\partial t} + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} \delta f_s + \mathbf{v}_E \cdot \nabla \delta f_s + \frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{\parallel} \frac{\partial \delta f_s}{\partial v_{\parallel}} = -\frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{\parallel} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} + C$$

は、モデルに入れたとしても、エネルギーフラックスなど、巨視的な輸送量への影響は小さいことが報告されてきた。

- しかし、Alfvén波によるオーロラ電子加速などでは、共鳴相互作用により $\partial \delta f / \partial v_{\parallel} \sim O(1)$ となり、項全体が $\sim O(\epsilon^2)$ となりうる。
- 巨視的な輸送量や非線形飽和レベルへの影響は小さくとも、速度空間分布の構造を決定するには重要な影響を持つ。

⇒この項を新たにGKVに実装

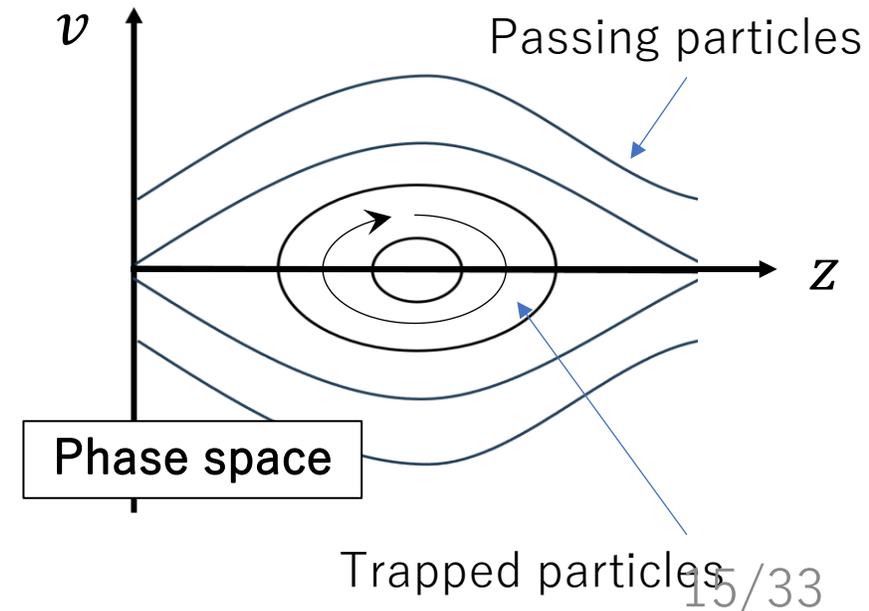
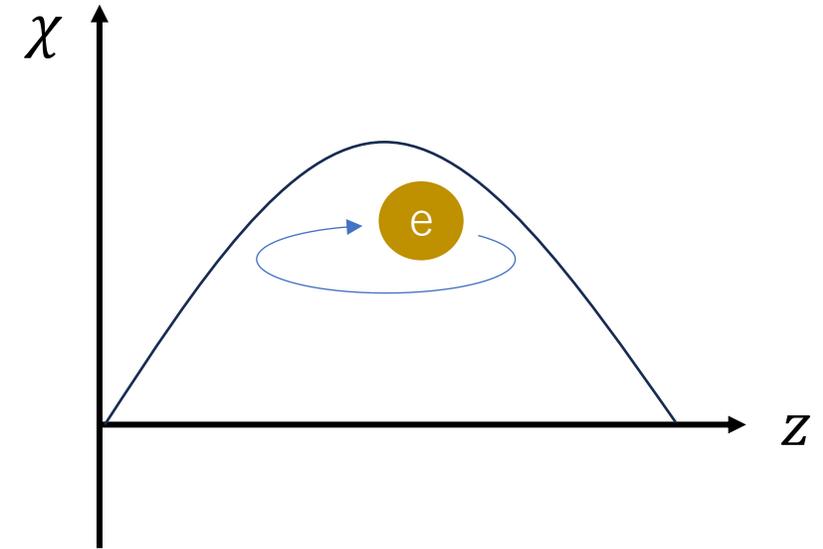
3. 非線形加速項の導入：非線形Landau減衰

■ 1次元無衝突系の電子の例

- 無衝突系では，エネルギーが保存する

$$H = \frac{m_e v^2}{2} - e\chi = \text{const.} \quad -\nabla\chi = E_{\parallel}$$

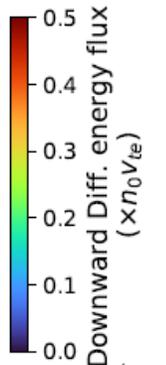
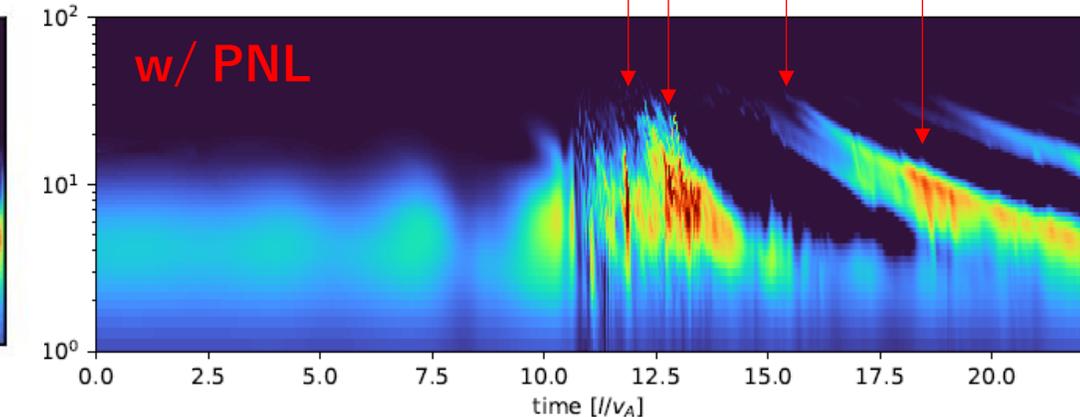
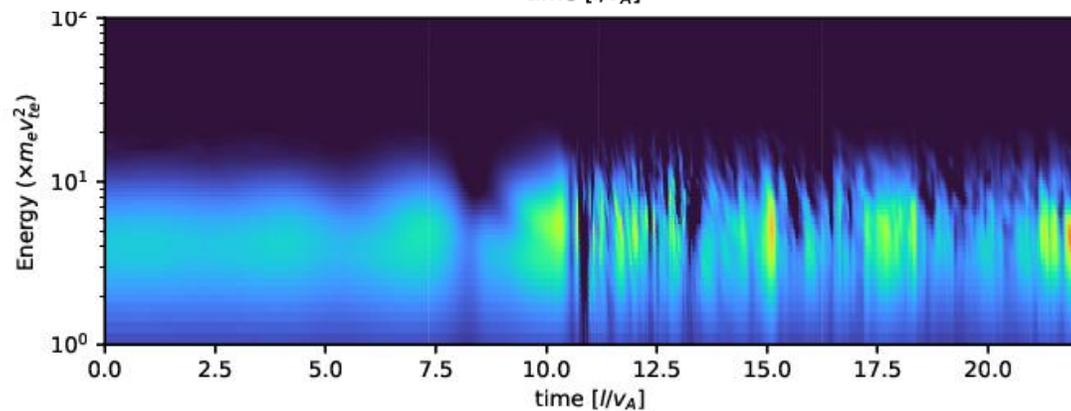
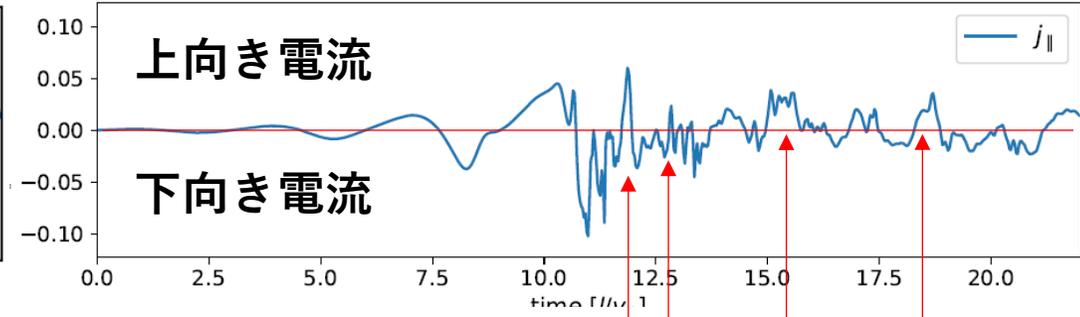
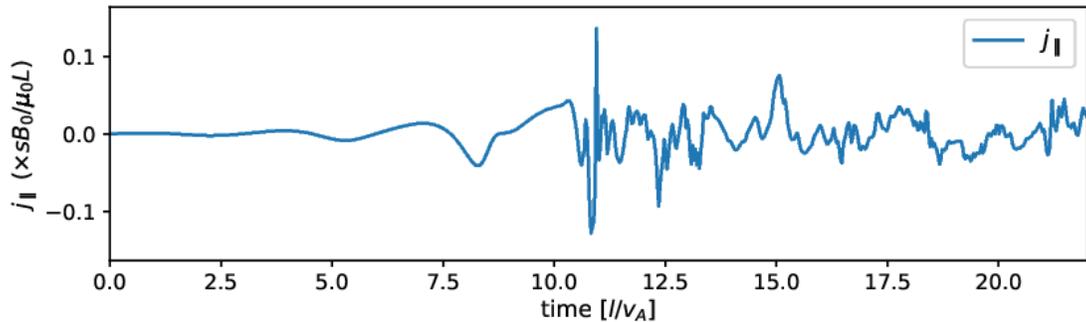
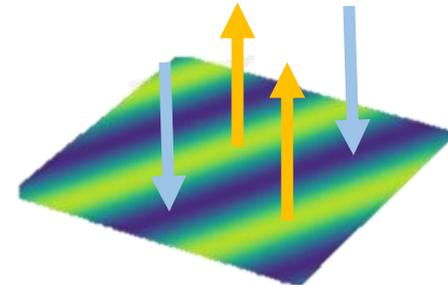
- エネルギー H を一定に保つため，ポテンシャルが大きな領域では速度も増大する（加速）
- 速度が小さい電子は，相空間内の一部の領域に捕捉され，周回軌道を描く - 集団的には渦を作る。
- PNLは，この捕捉過程を考慮するために必要。



3. 非線形加速項の導入：エネルギーフラックススペクトル

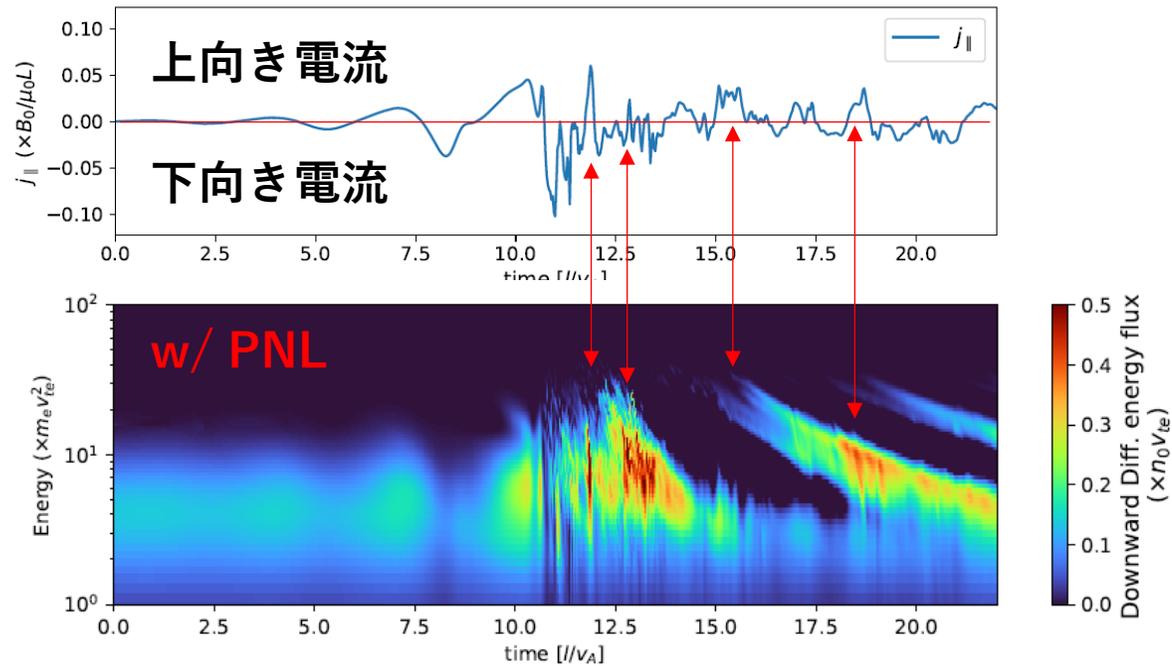
- 電離層上での沿磁力線電流と、ピッチ角 0° （下向き）の電子微分エネルギーフラックス $J_{E\parallel} = v_{\parallel}^4 \delta f(v_{\parallel}, v_{\perp} = 0)$
- 固定点での値**（オーロラ上空を通過するフライトではなく、固定点での非線形時間発展の追跡）
- 非線形加速（PNL）項**がない場合とある場合の比較。

アーク上では上向き電流（降り込み電子）
アーク外では下向き電流（上向き電子）が対応

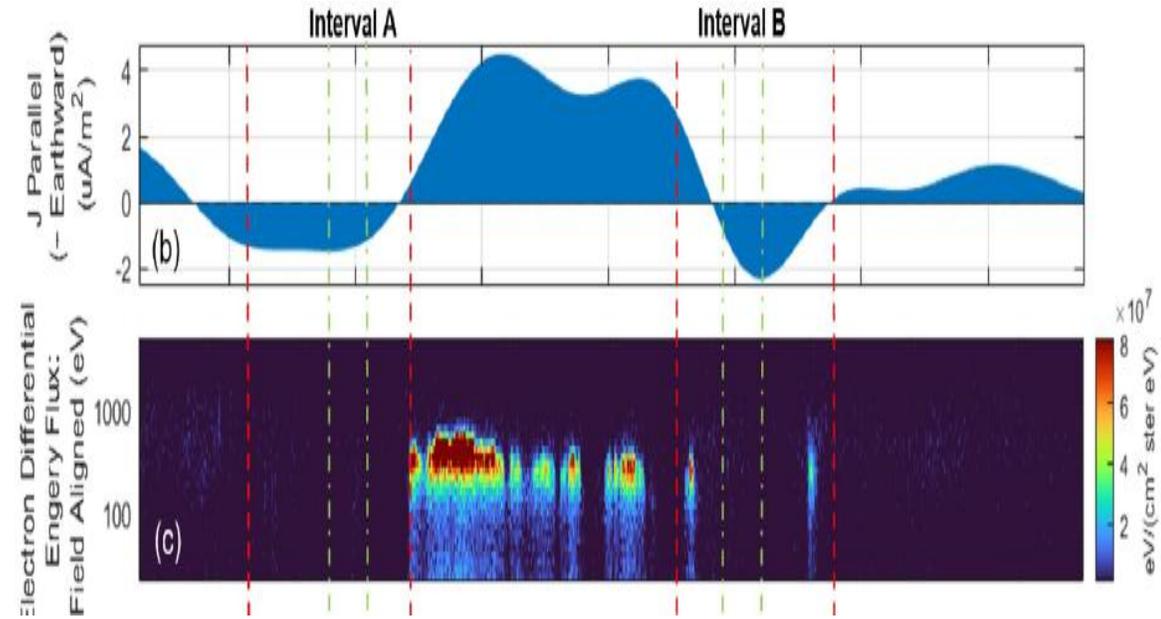


3. 非線形加速項の導入：観測結果との比較

本研究のシミュレーション結果
at 電離層 ($z/l = 0.0$)

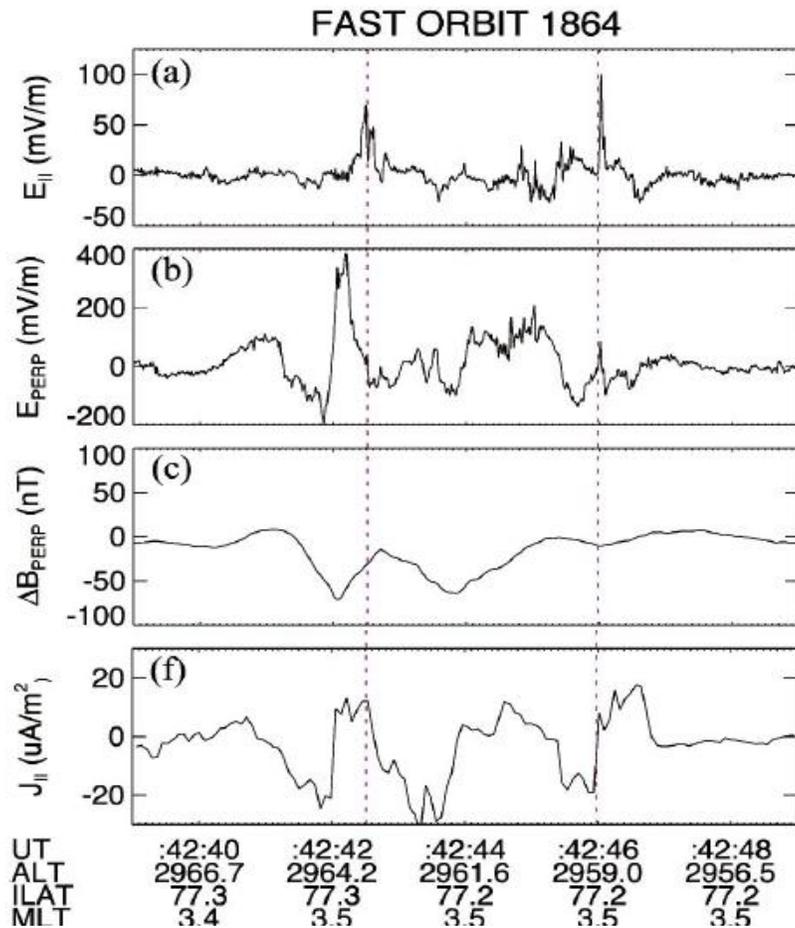


Greene+ (2025)による、小スケールオーロラに関連する観測結果 at altitude ~ 190 km

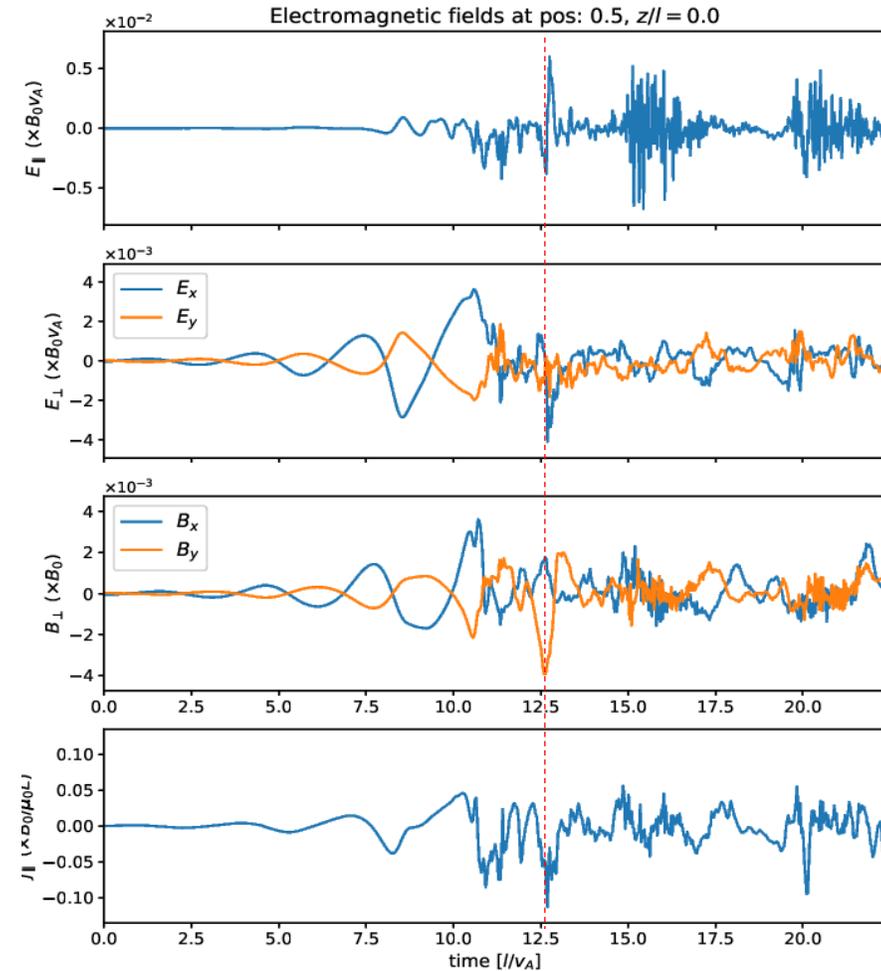


- シミュレーションにより、オーロラ領域（上向き電流）内において、降り込み電子のエネルギーフラックスが増大する様子がよく再現されている。
- * ただし、シミュレーション結果は固定点での時間変化であるのに対し、観測はオーロラ上空を通過するロケット観測であることに注意

3. 非線形加速項の導入：観測結果との比較



FAST衛星による典型的な慣性Alfven波の電磁的構造の観測データ (Ergun + 2005 PoP)

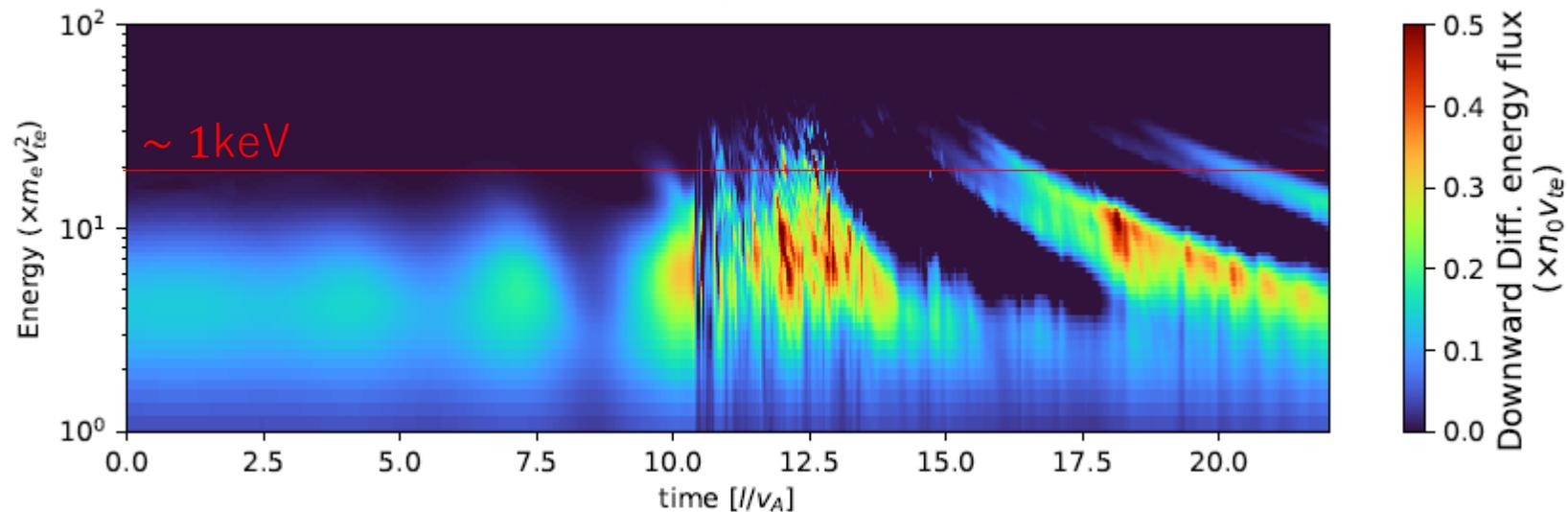


一次的に、 E_{\perp} と同オーダーの E_{\parallel} が生じ、強い下向き電流が駆動されている。

3. 非線形加速項の導入：定量的見積もり

プラズマパラメータの概要

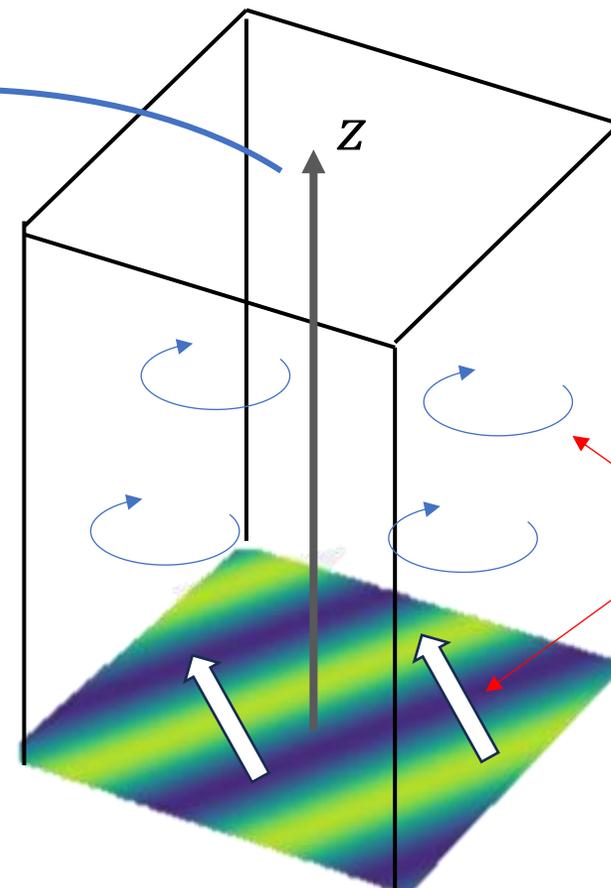
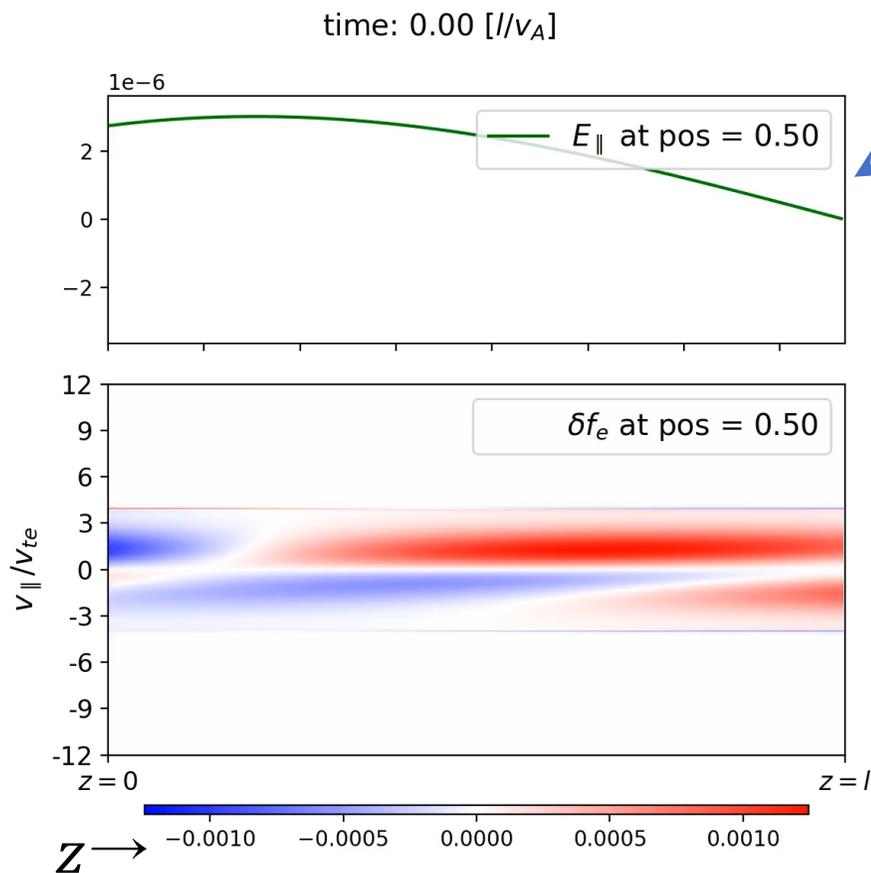
- ベータ値やAlfvén速度を含め、背景パラメータは一様定常。 $T_i/T_e = 1$
- オーロラ加速域（高度 $2-3R_E$ ）を想定した慣性Alfvén波ケース（ $v_A = 4.5v_{te}$ ）
- 加速域（高度 $2-3R_E$ ）を想定すると、 $m_e v_{te}^2 = T_e \sim 50\text{eV}$
- したがって、シミュレーションで得られたエネルギーレベルは、最大 $\sim 2\text{keV}$ ほどに相当。
at $z/l = 0.2$



3. 非線形加速項の導入：電場と相空間構造

■ 平行電場 E_{\parallel} と分布関数 δf

- 降り込み電子の分布関数 $\delta f(v_{\parallel}, \mu = 0)$ と平行電場の構造を直接調べてみる。

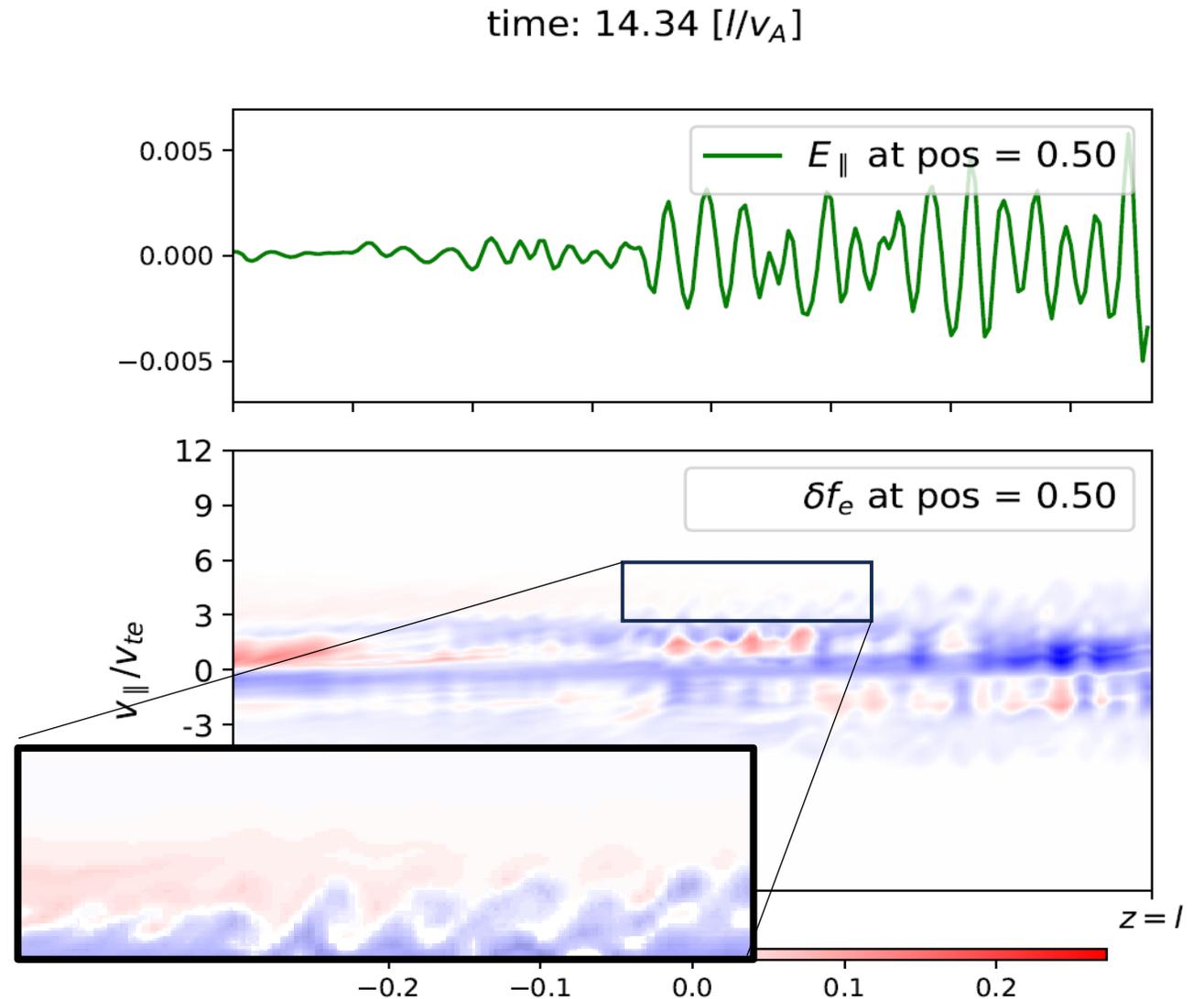


Note that the large-scale convection and (in the nonlinear phase) stirring by the $E \times B$ motion are constantly happening

3. 非線形加速項の導入：電場と相空間構造

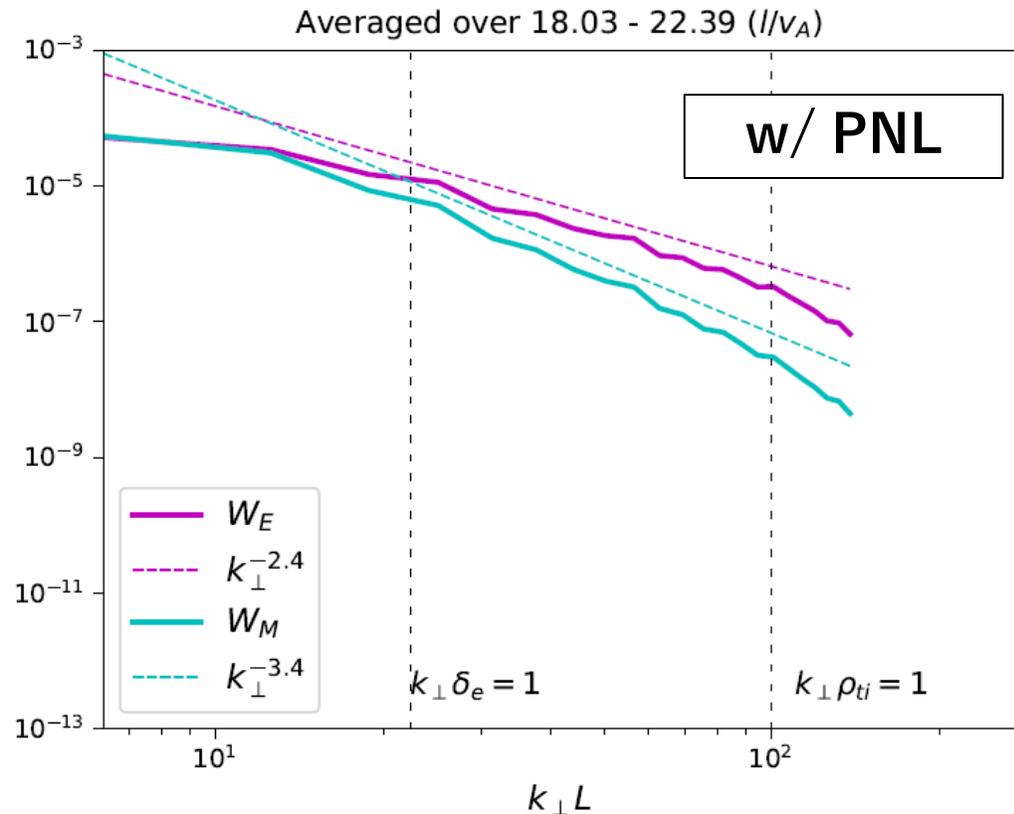
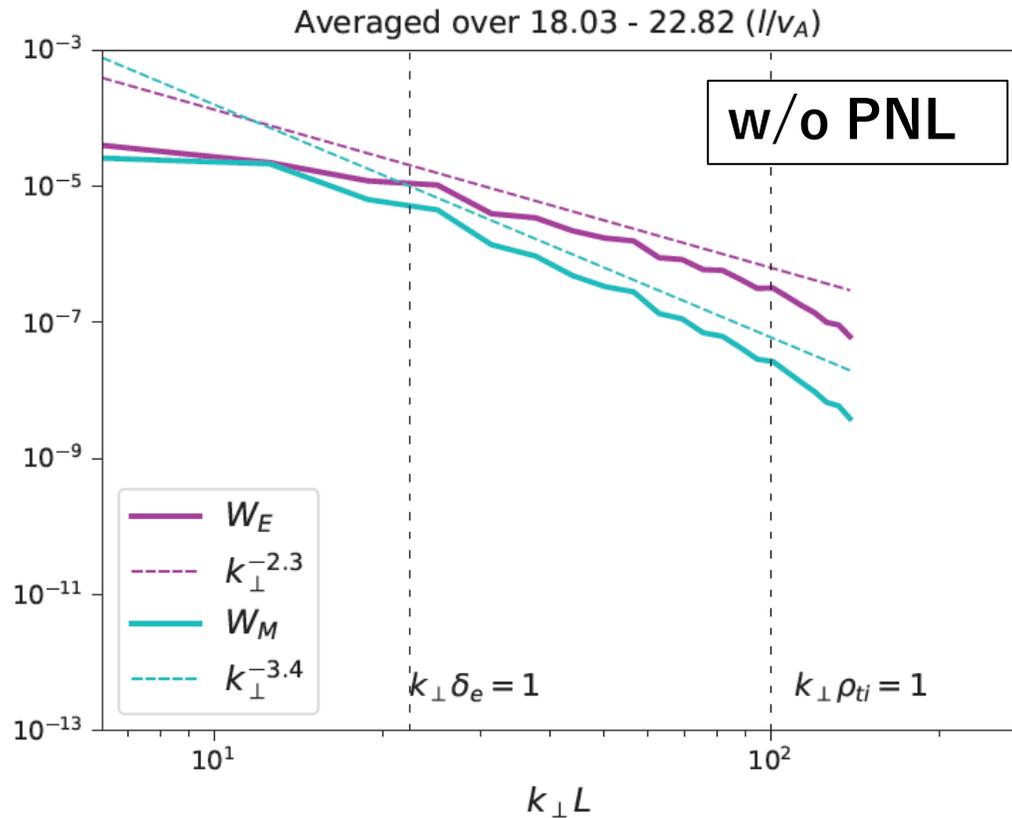
■ 電子ホール形成

- 局在化した電場構造が形成される。
- 対応する領域で，波動粒子相互作用が最も効果的に起こる
Alfven速度付近 ($v_A \sim 4v_{te}$) において，電子ホール，あるいは相空間渦構造が確認できる。



3. 非線形加速項の導入：乱流スペクトルへの影響

- PNL有無によって、乱流エネルギースペクトルに変化は見られない。
→線形Landau減衰への影響は小さい？



4. カッパ分布の導入：カッパ分布とは

- 核融合プラズマでは、局所平衡分布はMaxwellianと仮定される。
- しかし、多くの宇宙プラズマ系で観測されるのはカッパ分布

$$F_{s\kappa} = n_{s0} \left(\frac{1}{2\pi\kappa v_{ts\kappa}^2} \right)^{3/2} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 1/2)} \left(1 + \frac{v^2}{2\kappa v_{ts\kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1)}$$

ここで $\Gamma(n)$ はガンマ関数で

$$v_{ts\kappa} = \sqrt{\frac{T_s}{m_s} \left(1 - \frac{3}{2\kappa} \right)}$$

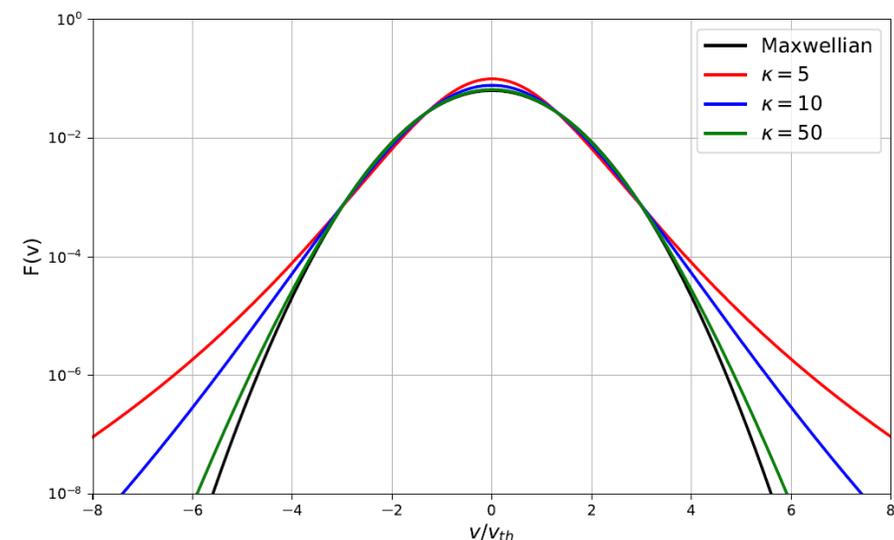
は補正を加えた熱速度（カッパ分布における最頻速度）。

- κ は、Maxwellianからのずれに対応する指数で、 $\kappa \rightarrow \infty$ の極限で、

$$\text{Maxwellianに一致する：} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} F_{s\kappa} = F_{sM}$$

- オーロラ電子の分布としては、 $\kappa \leq 10$ のカッパ分布が一般的に観測されている。

Maxwellianとカッパ分布（ $\kappa = 5, 10$ および50）の比較



4. カッパ分布の導入：非Maxwellian分布の導入にあたって

- Alfvén波の分散関係は、Maxwellianの場合の

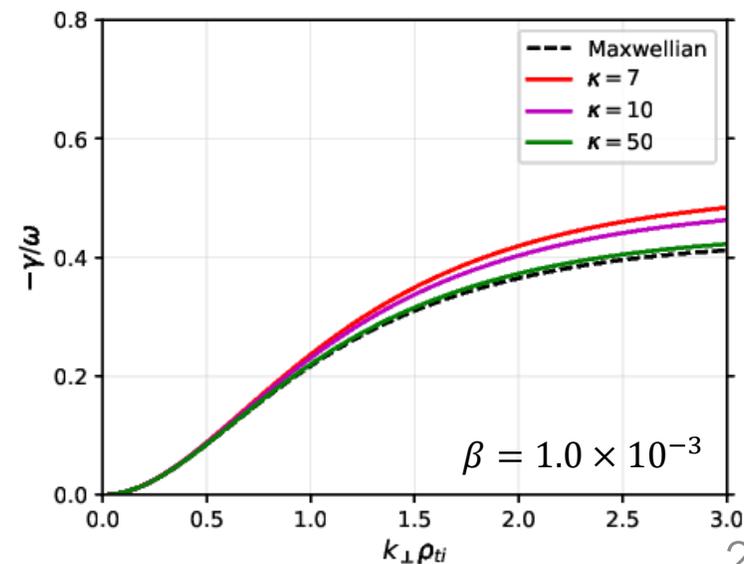
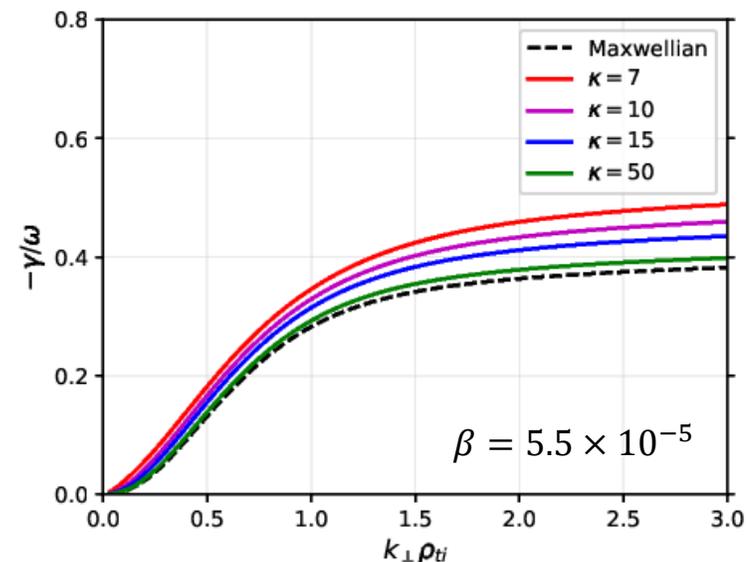
$$\left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_A}\right)^2 = \rho_{ti}^2 k_{\perp}^2 \left(\frac{1}{1 - \Gamma_{0i}} + \frac{T_e/T_i}{1 + \zeta_e Z(\zeta_e)} \right)$$

から

$$\left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_A}\right)^2 = \rho_{tik}^2 k_{\perp}^2 \left(\frac{1}{1_{\kappa} - G_{0i}} - \frac{T_e/T_i}{Z_e} \right)$$

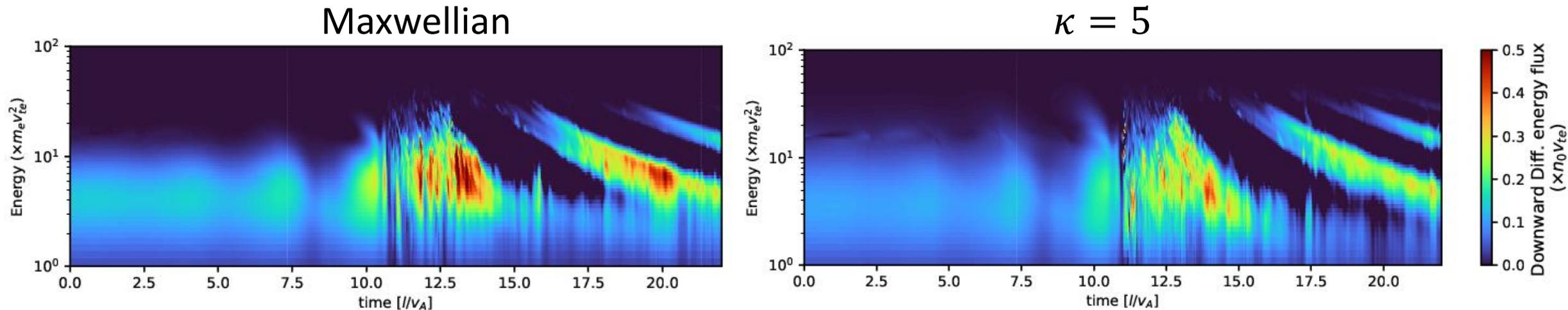
に変更される ($\rho_{tik} = v_{tik}/\Omega_i$)。

- 右図は成長率を、Maxwellianの場合とカッパ分布 ($\kappa = 7, 10, 15, \text{ and } 50$) の場合で比較したもの。
- 上が慣性Alfvén波ケース (低ベータで減衰効果が支配的), 下が運動論的Alfvén波ケース (相対的に高ベータで有限Larmor半径効果が支配的)
- 超熱的粒子が増えるほど, 高波数成分で減衰効果が増大する。



4. カッパ分布の導入：エネルギーフラックスへの影響

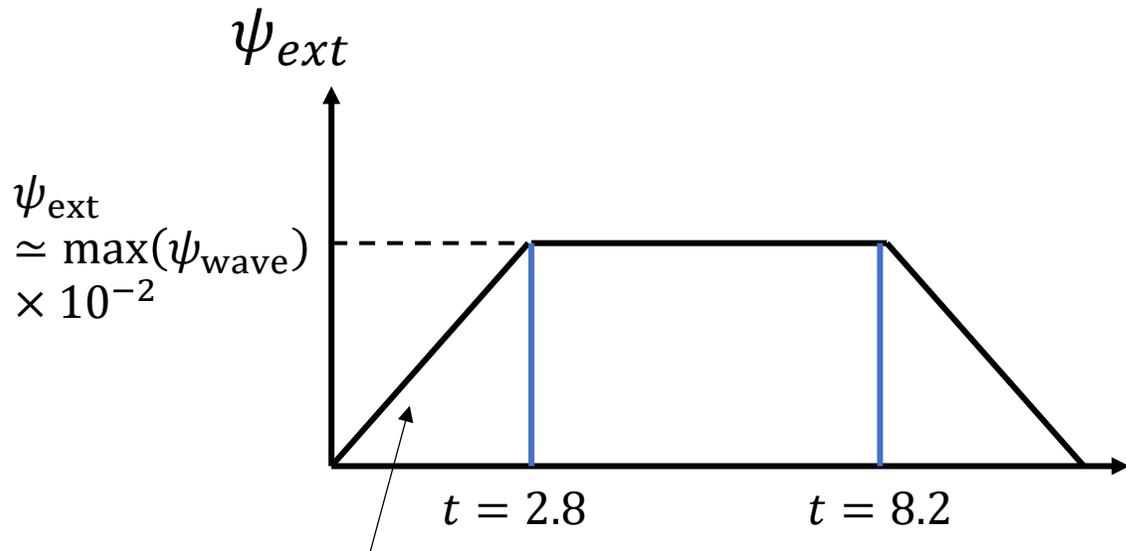
- Maxwellianと、カッパ分布 ($\kappa = 5$) の場合のエネルギーフラックスの比較
- 背景分布以外は同一の設定で計算
- カッパ分布 (超熱的粒子) の振り込み電子のエネルギーフラックスへの影響は大きくない。



5. 相空間ホールの解析：1次元モデル

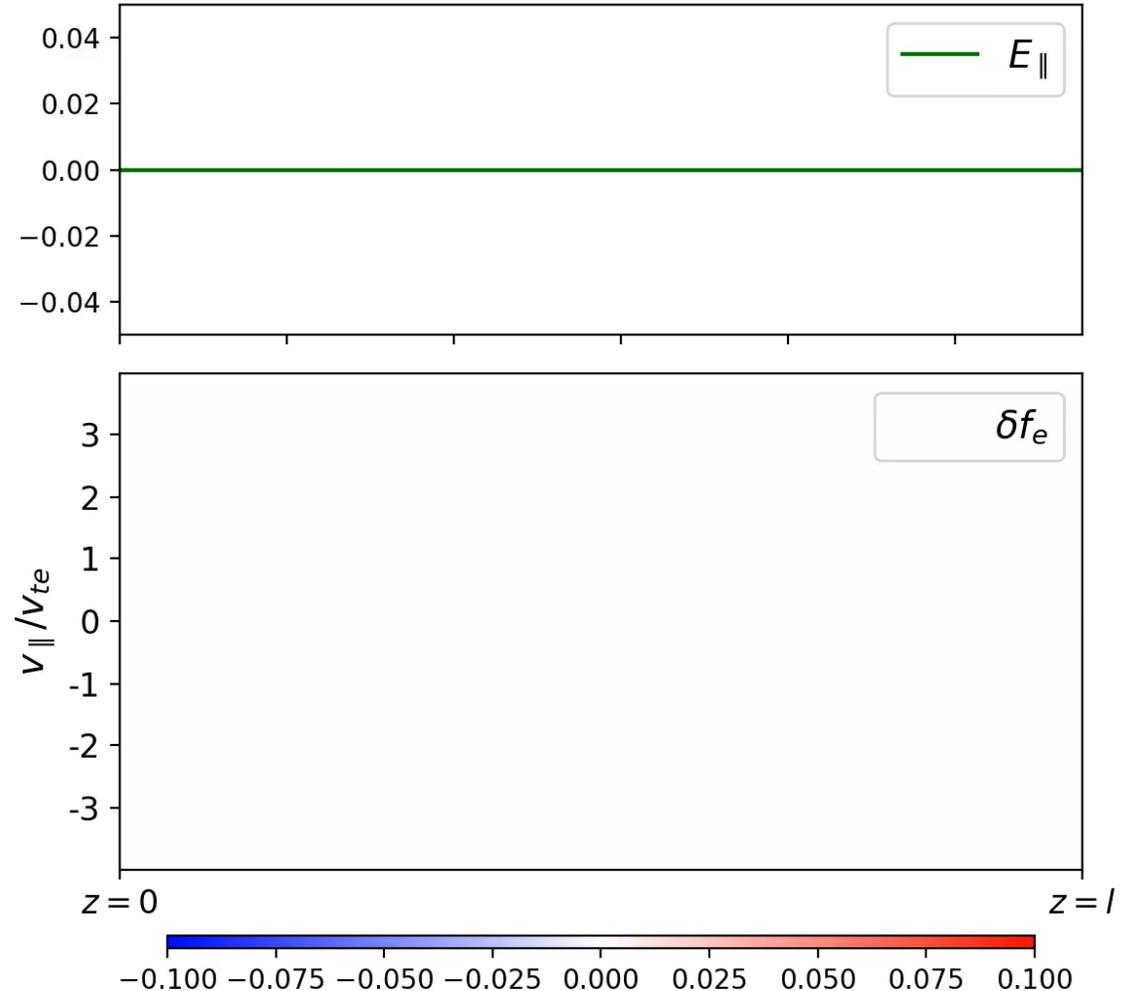
■ シミュレーション設定

- 相空間構造の発展を追跡するため、1次元周期境界モデルを利用
- 自由エネルギーソースとして、外部電場をランプアップし、Alfven波を励起
- $v_A/v_{te} = 2$ の慣性Alfven波を想定



External vector potential is ramped up linearly

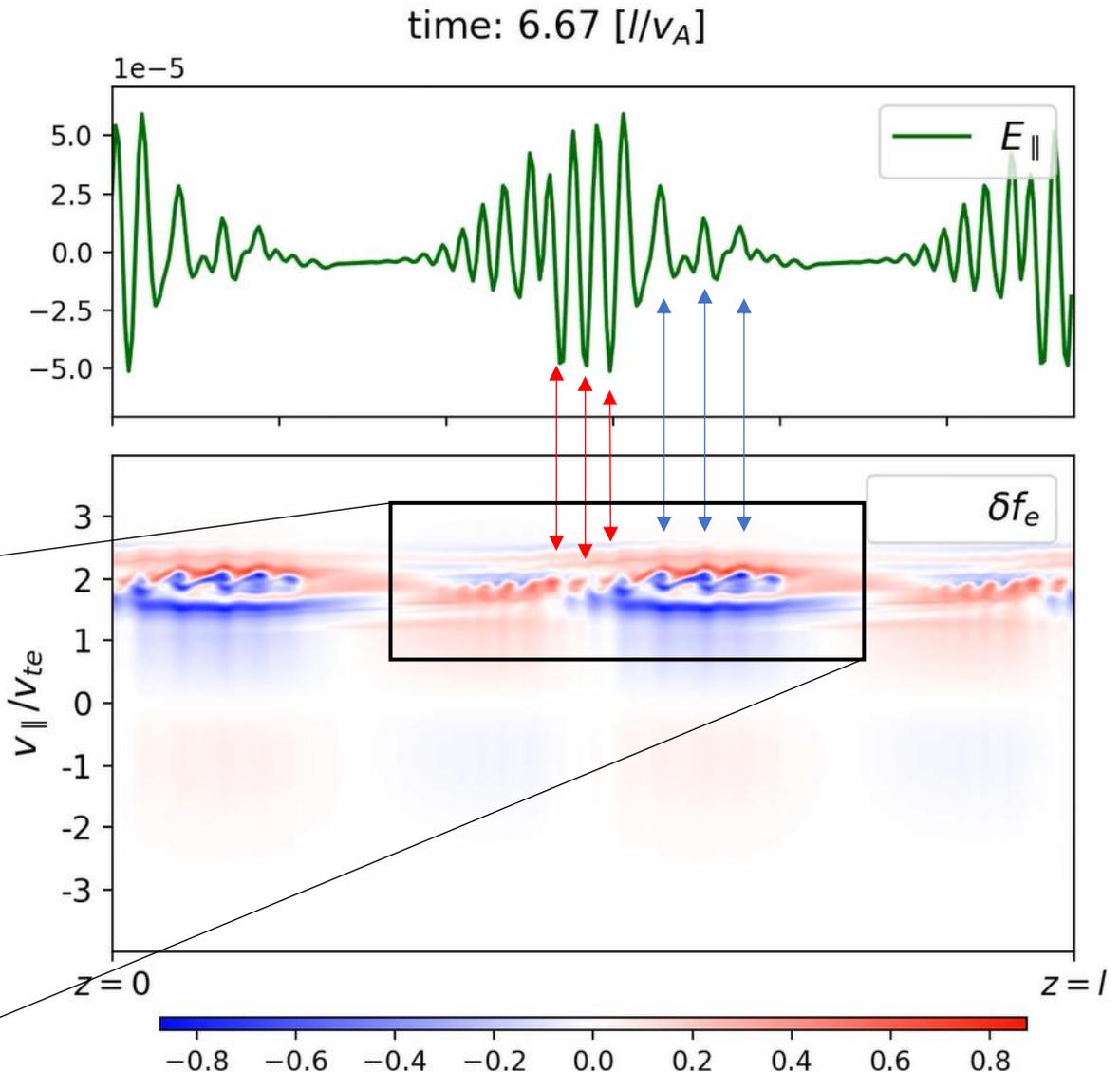
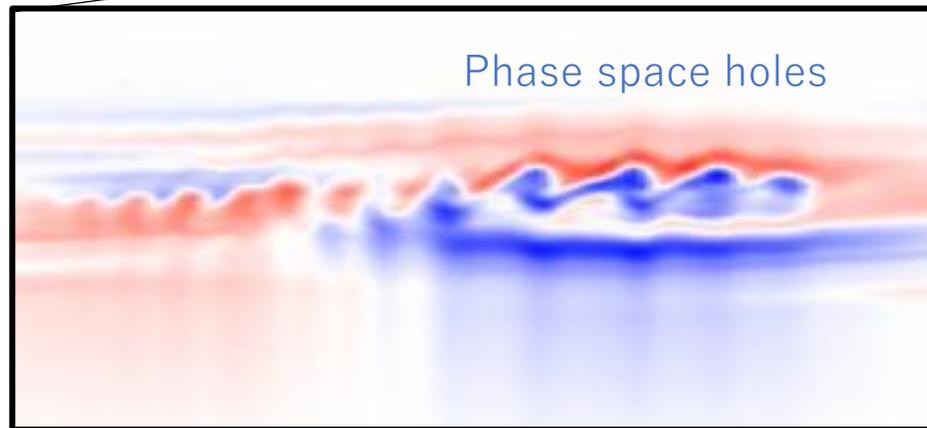
time: 0.00 [l/v_A]



5. 相空間ホール解析：TDSの形成

■ シミュレーション結果

- 局在化した電場構造が形成
- これらの電場により
 - 局所的な加速
 - 相空間ホール/クランプの形成が生じている

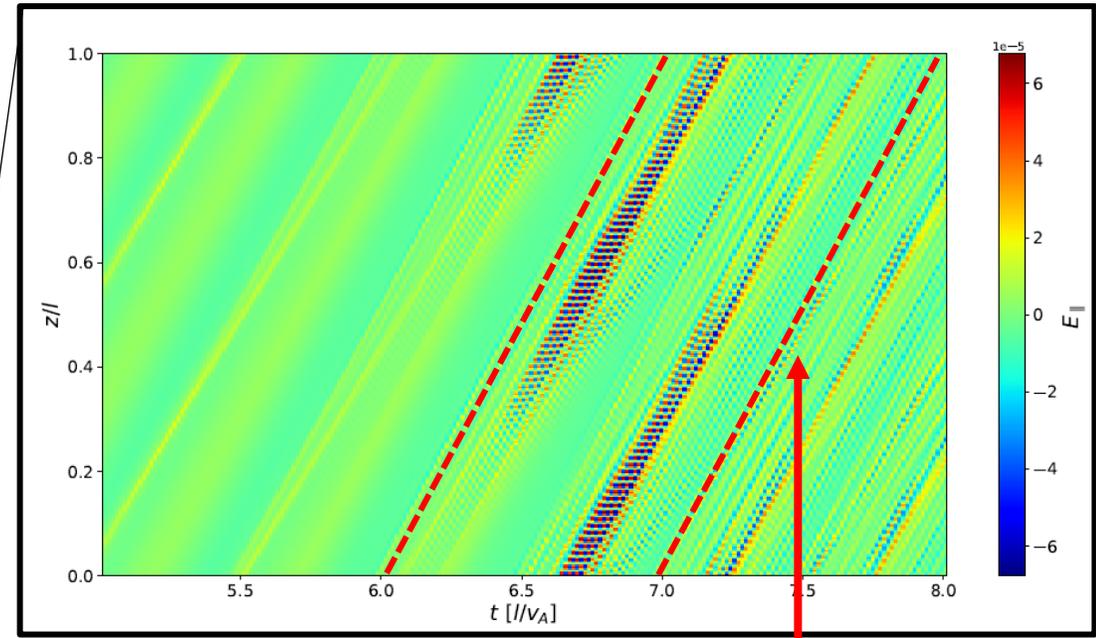


5. 相空間ホール解析：TDSの伝播

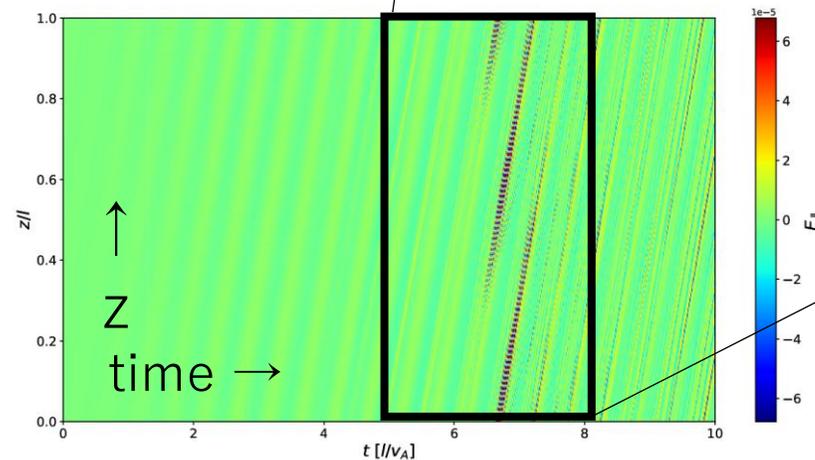
■ 波の電場 E_{\parallel} の伝播

- 平行電場の大きさを、t-z面にマップ
- 細かな構造がホール/クランプに対応
- ホールの伝播はAlfven波よりも速くはない。

t-z map of wave E_{\parallel}



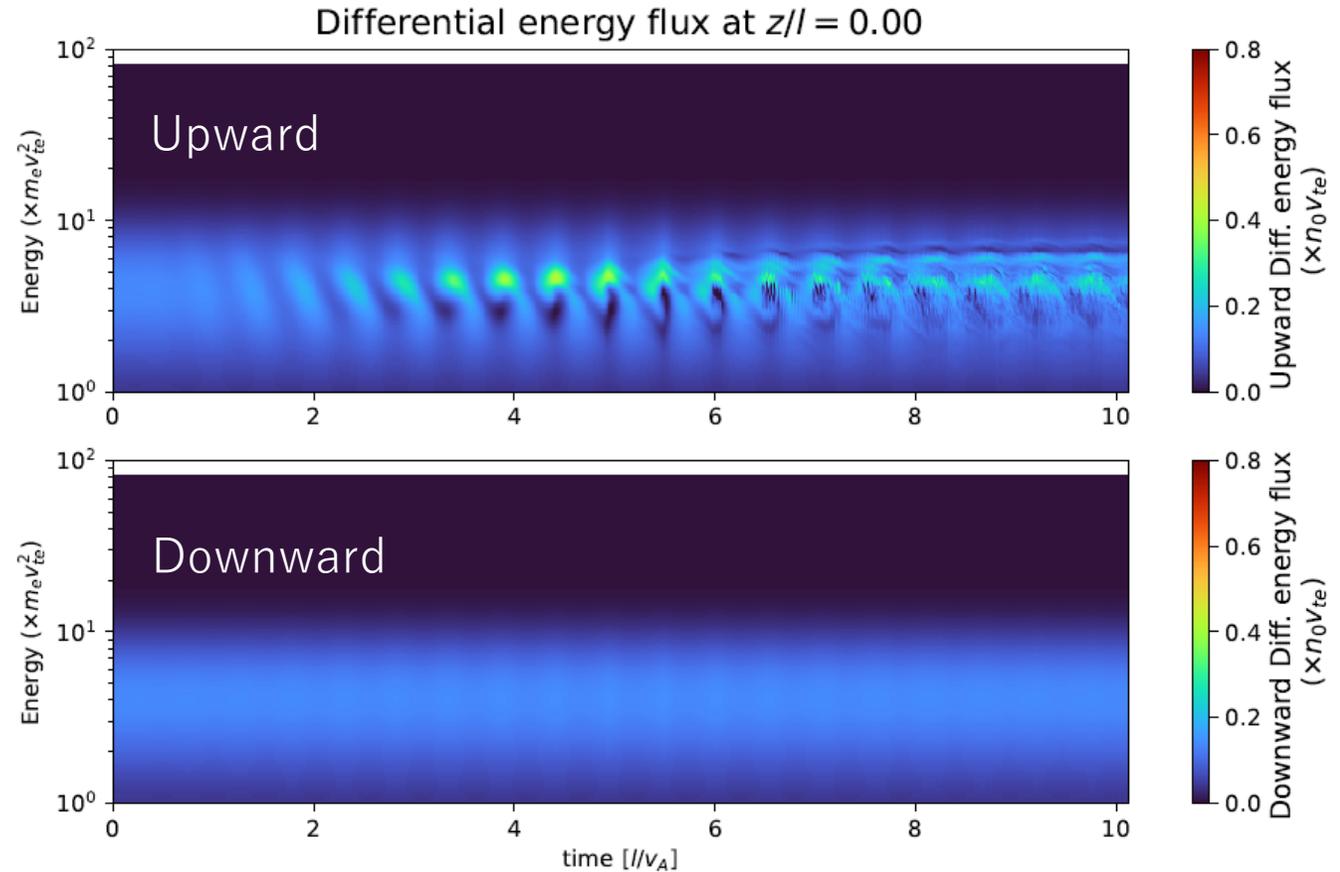
Slope of the Alfvén speed



5. 相空間ホールの解析：エネルギーフラックススペクトル

■ 微分エネルギーフラックス

- 相空間領域の分離は, $J_E \propto v^4 f$ である微分エネルギーフラックスでより強調される
- 微分エネルギーフラックススペクトルのenhancementは, 局所的な加速のみによっても生じる。

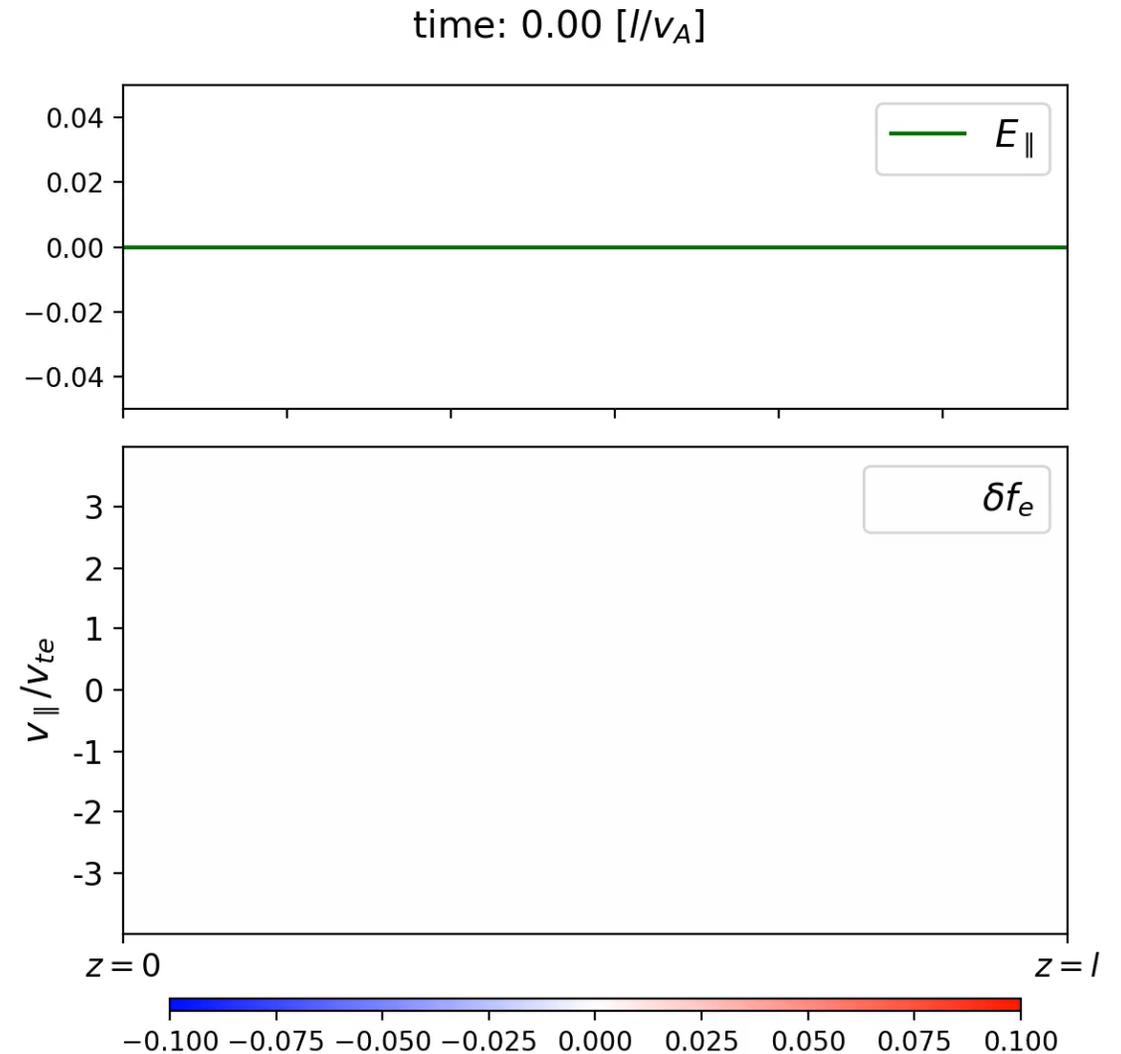


time →

5. 相空間ホールの解析

■ カッパ分布の影響

- その他の条件は同じで、カッパ分布でのシミュレーションを行ってみた。
- 平行電場の微細構造が成長せず、対応する捕捉構造も明確ではない。



5. 相空間ホール解析

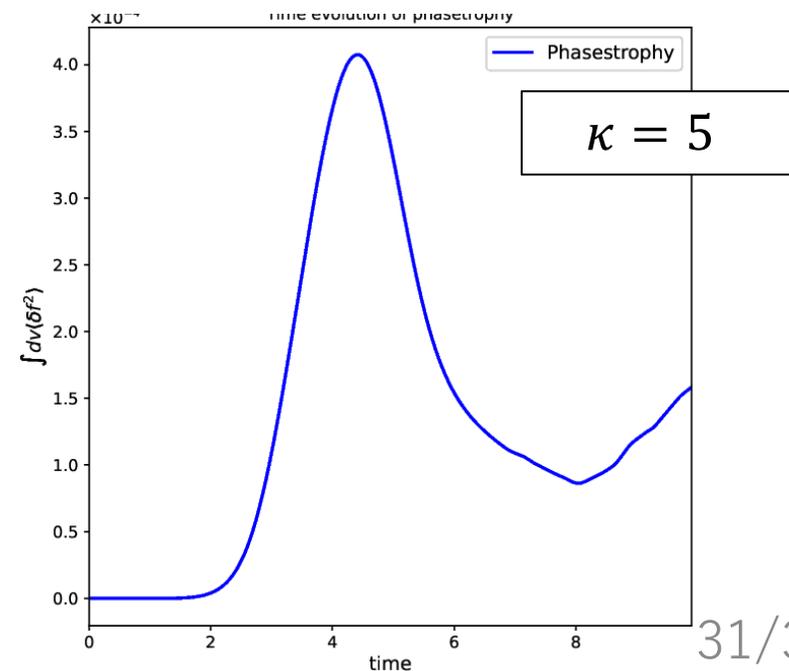
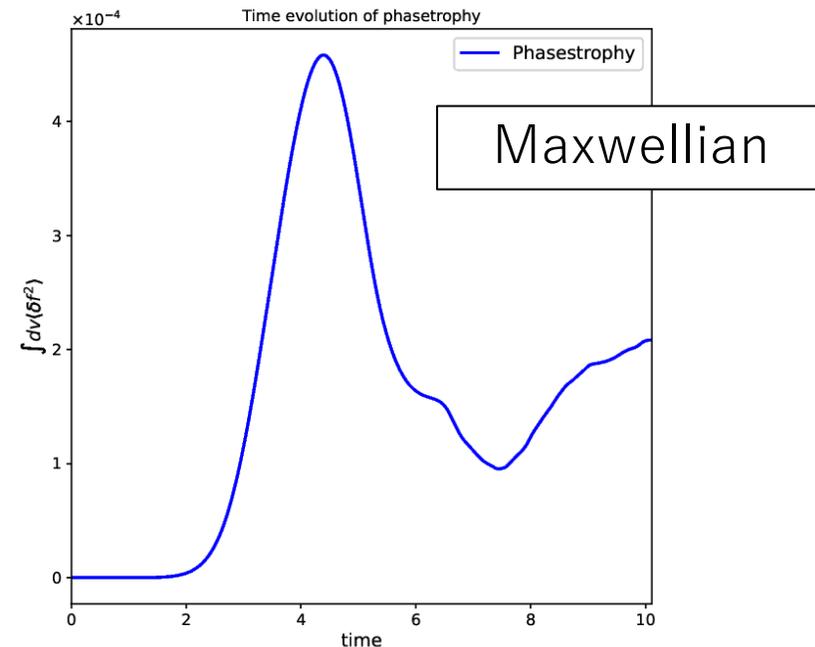
■ フェーズトロフィー

- 2次元流体におけるエンストロフィーに対応するフェーズトロフィー

$$\psi_h = \int dv \langle \delta f_e^2 \rangle_z, \quad \langle \dots \rangle_z = \frac{1}{l} \int_0^l dz$$

の時間発展

$$\frac{d}{dt} \psi_h = \frac{2e}{m_e} \int \frac{d \langle f_e \rangle_z}{dv_{\parallel}} \langle E_{\parallel} \delta f_e \rangle_z dv$$



6. まとめと今後の展望：核融合研究との接続

■ 高エネルギー粒子と輸送

- NBIなどに由来する高エネルギー粒子が、乱流の成長に影響する。
- 特に、その背景分布の形状が重要。
- 宇宙プラズマにおいても、背景分布の非等方性は重要で、今後GKVに実装予定⇒核融合・宇宙プラズマ両者における乱流への影響が調べられる。
- また、高エネルギー粒子の分布が作るホール構造も興味深い対象

■ 双極子磁場中の低周波現象

- GKVは現在、双極子磁場を実装中
- 低周波波動と放射線帯輸送の関係などにも応用予定
- RT-1など、磁気圏型装置との相補的な研究により、磁気圏型磁場配位中での低周波現象の理解を深める

その他、周期境界モデルは、基礎過程に加え、太陽風乱流などの研究にも応用可能。
特に、PNLを含んだシミュレーションはほとんど行われていないはず

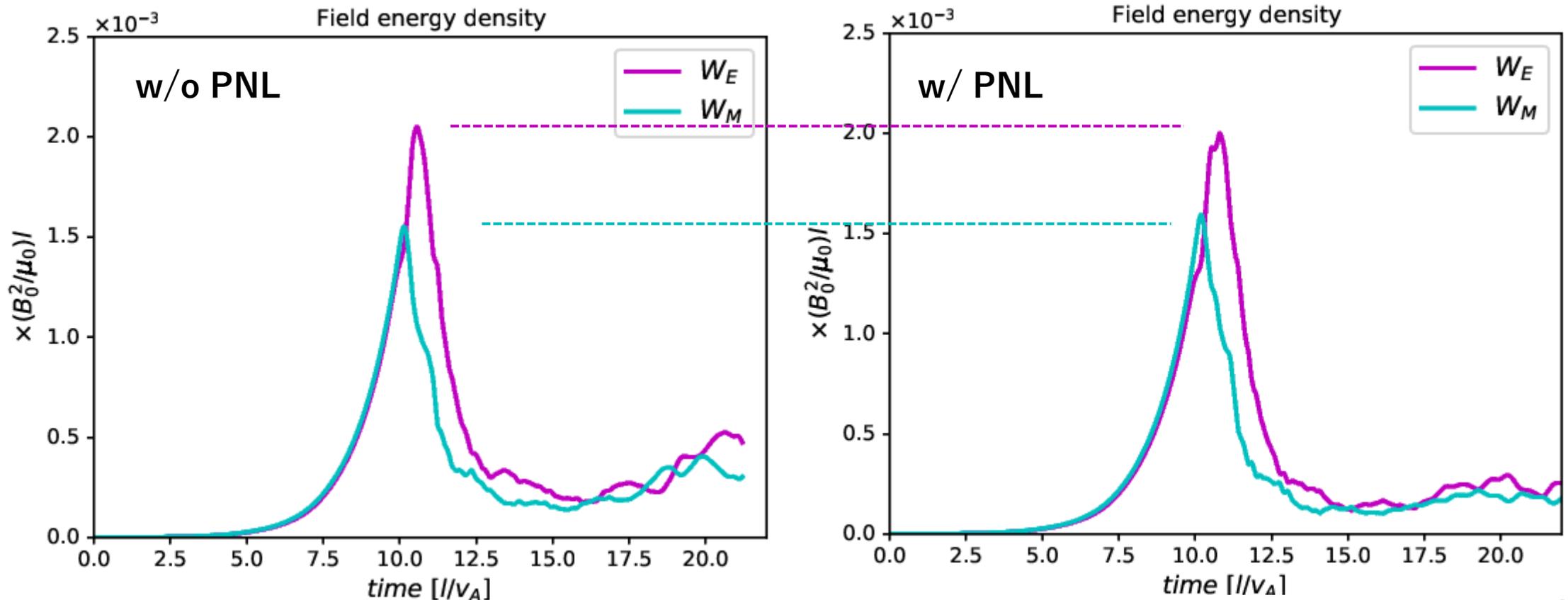
6. まとめと今後の展望

- 核融合プラズマを対象に開発されてきたジャイロ運動論的コードGKVを，宇宙プラズマに適用するために行っている拡張を紹介した。
- 特に，磁気圏-電離層（M-I）結合系を具体的な対象とし，オーロラ電子の加速とオーロラ構造の非線形発展が統一的にシミュレーションできることを示した。
- オーロラ電子加速において，非線形項が重要な役割を果たすことを示した。
- 今後は，非等方背景分布や磁場の非一様性を取り入れ，シミュレーション設定の現実性向上を追求する。

Supplemental Slides

3. 非線形加速項の導入：飽和レベルへの影響

- 磁気圏全体の電磁場のエネルギーの時間発展
- 速度分布構造に影響を与えても、巨視的な量への影響は小さい。



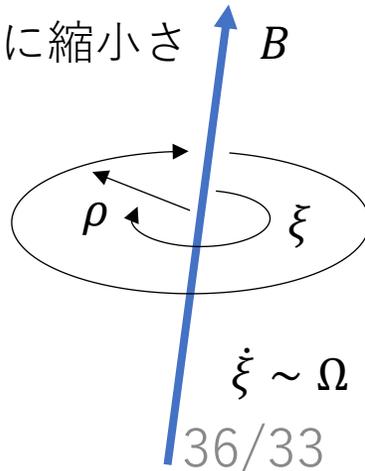
2. ジャイロ運動論的モデル：ジャイロ運動論の基本仮定

■ ジャイロ運動論とは

磁化されたプラズマ中 ($\rho/L_{\perp} \sim \epsilon_B \ll 1$) で、**低周波**な揺動に関連する不安定性や乱流、およびその結果生じる輸送を運動論的に記述する理論 (ρ : Larmor半径; L_{\perp} : 背景量の垂直方向の変化スケール)。

■ 基本仮定

- ジャイロ運動のような速いスケールについて平均化することで、対象をジャイロ周波数 Ω よりも周波数 ω が十分小さい現象に限定： $\omega/\Omega \sim \epsilon_{\omega} \ll 1$
- またこれにより、共役な運動量である磁気モーメントが保存量となり、相空間次元が5次元に縮小される。
- プラズマは局所平衡に近いという仮定より、分布関数 f の揺動 δf について $\delta f/f \sim \epsilon_{\delta} \ll 1$
- スカラーポテンシャルや磁場の揺動、 ϕ および δB 、についても同様に $e\phi/T \sim \delta B/B \sim \epsilon_{\delta}$
- 磁化の影響による揺動の非等方性を考慮： $k_{\parallel}/k_{\perp} \sim \epsilon_{\omega}$



2. ジャイロ運動論的モデル：ジャイロ運動論の基本仮定

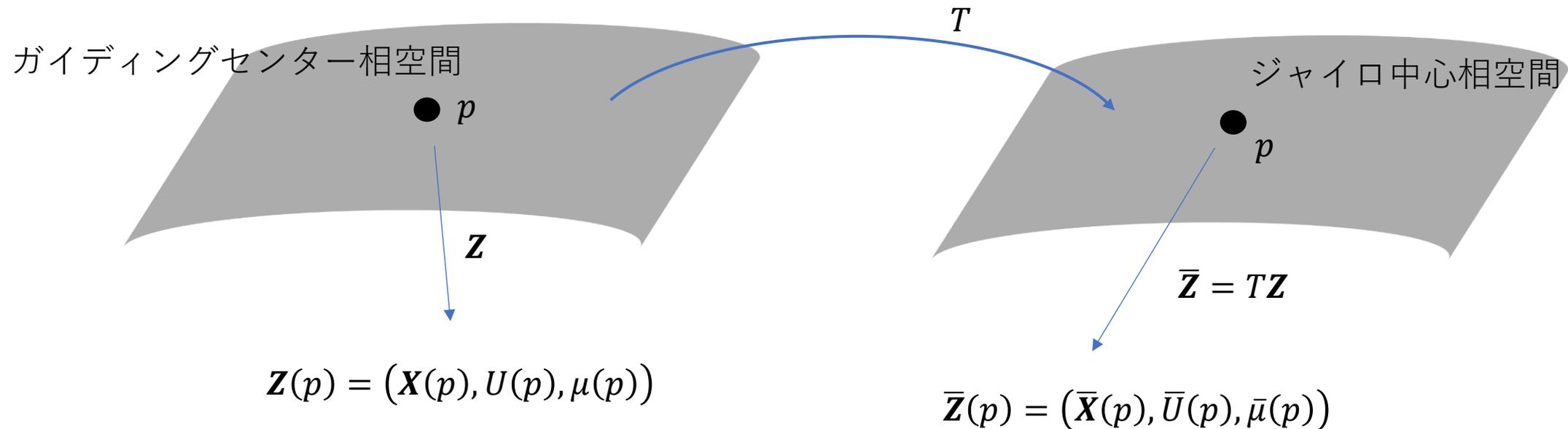
■ ガイディングセンター座標系とジャイロ中心座標系

- 電磁場は粒子位置で評価されるため、電磁場の揺動があるとき、その位置依存性のためにジャイロ位相依存性が入り込む。
- **ガイディングセンター座標系**のままでは、軌道に沿って磁気モーメント μ の値が一定ではなくなる。
- よって、ガイディングセンター座標系に近いが、磁気モーメント $\bar{\mu}$ が保存量となる新たな座標系があると望ましい。
- 状況に応じて、任意の精度（微小パラメータの次数）で、 $\bar{\mu}$ の保存則を維持したい。
- これらの要求を満たす変換の手法がLie群を用いた**Lie変換摂動論**で、その結果得られるのが**ジャイロ中心座標系**
- 宇宙プラズマと核融合プラズマとでは、異なるオーダーリング仮定などが必要となりうる。
- モデルの拡張のためには、基本的な導出に立ち返る必要がある。

2. Lie変換の概要：座標系と座標変換

✓ Lie変換摂動論の考えも手続きも単純だが、考えている対象を整理しないと混乱しやすい

- 空間は点の集まりで、点それ自体に値が割り振られていたりはない。
- それに値を割り振る（実数の組に写す）関数が**座標系**（**coordinate system**）で、写された数の組が（局所）**座標**（**coordinates**）。
- 座標変換は、同じ点 p に値を割り振る関数の間の変換。
- 異なる座標系が敷かれた別々の空間の間の変換ともみなせる。

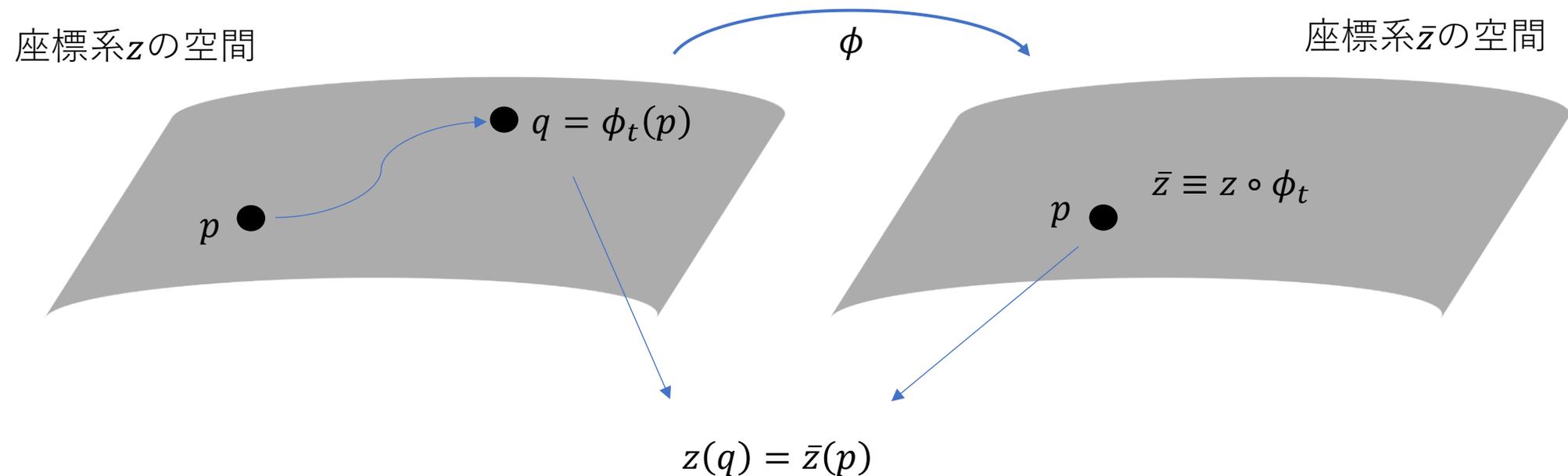


2. Lie変換の概要：わかりやすい例

- 時間発展による点の移動は一種の変換であり、フロー ϕ_t を用いて
$$q = \phi_t(p), \quad z(q) = z(\phi_t(p))$$

と表せる。

- この関係からわかる通り、時間発展も $\bar{z} \equiv z \circ \phi_t = \phi^* z$ という新たな座標系を与える変換になっており、時間発展も、一種の座標変換とみなせる。



2. Lie変換の概要：わかりやすい例

✓ 時間発展は、Hamiltonianを生成の母関数とするLie群を用いた変換の例とみなせる。

• Lie群は一般に、 $g = e^{tL}$ の形における。 t は変換のパラメータで、 L は群の生成子と呼ばれるベクトル場。

• ある相空間座標の時間発展は、Hamiltonian H により

$$\frac{dz^i}{dt} = v_H[z^i] = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} = \{H, z^i\}$$

と記述される ($J^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$)。

• つまり、系の状態は、相空間上のベクトル場 v_H の積分曲線に沿った点の移動として記述できる。

• このフローは群を成しており、その表現（座標系に対する演算子）として

$$g = e^{tv_H}, \quad v_H = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z^i} = \{H, \}$$

と書ける。

• $z^i(t) = e^{tv_H} z^i(0)$ であり、無限小変換ならば

$$z^i(0) \rightarrow z^i(t) = z^i(0) + t\{H, z^i\}$$

Lie変換の概要：

- このように、連続的なパラメータを用いた $e^{\lambda L}$ により $\bar{z}^i(z^i, \sigma) \equiv z^i(\lambda + \sigma) = T(\sigma)z^i(\lambda)$ とするのが**Lie変換**

- この応用として、微小パラメータ ϵ を用いて、変換演算子

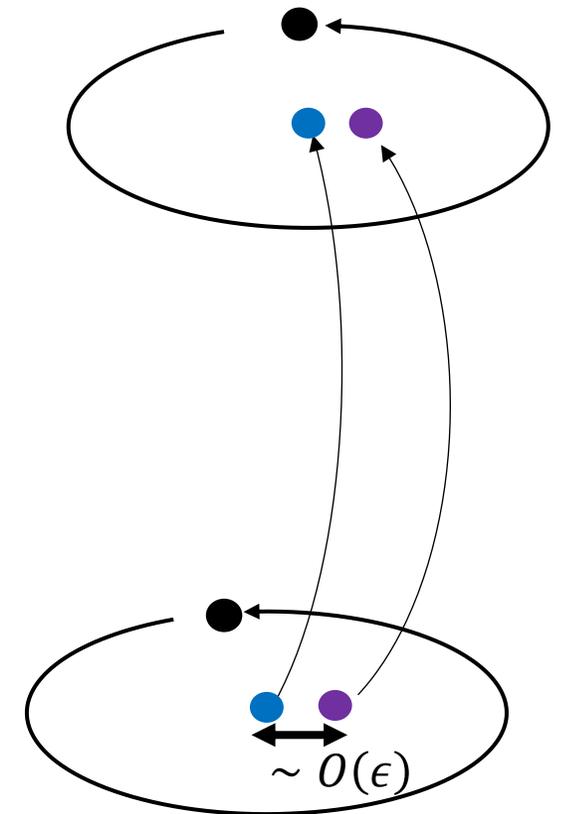
$$T = e^{\epsilon L}$$

を定義する。

- ここで、母関数を S とし、 $L = \{S, \}$
- $\bar{z}^i \equiv z^i(\epsilon) = Tz^i(0)$ であり、無限小変換ならば

$$z^i \rightarrow \bar{z}^i = z^i + \epsilon \{S, z^i\}$$

- (本当は相空間上での変換だが) 軌道として、**ガイディングセンター**から少しだけずれた**ジャイロ中心**の軌道を追跡することで、次元を一つ減らせる。
- 変換が適切に定義されているため、それをまた \Rightarrow ガイディングセンター \Rightarrow 粒子位置と逆変換し、情報を復元できる。



2. Lie変換の概要：比較

	時間発展	ジャイロ変換
変換の母関数	Hamiltonian H	ゲージ関数 S
パラメータ	時間 t	微小量 ϵ
ベクトル場	Hamiltonianベクトル場 $\frac{dz^i}{dt} = v_H[z^i] = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} = \{H, z^i\}$	$\frac{dz^i}{d\epsilon} = L[z^i] = J^{ij} \frac{\partial S}{\partial z^j} = \{S, z^i\}$
群の指数表現 (演算子)	$g = e^{tv_H}$	$T = e^{\epsilon L}$
無限小変換	$z^i(0) \rightarrow z^i(t) = z^i(0) + t\{H, z^i\}$	$z^i \rightarrow \bar{z}^i = z^i + \epsilon\{S, z^i\}$

運動量により生成される並進なども同様

Lie変換の概要：具体的手続き

- 座標変換に伴い、座標を変数とする関数も変換を受ける。
- 単一の成分だけでなく、座標系全体からジャイロ位相を取り除きたいから、LagrangianやHamiltonianの変換を考える。
- 変換の仕方はスカラー、（反変）ベクトル、微分形式などでそれぞれ異なる（変換の仕方で定義されるともいえる）。
- Lie変換の規則に従ってLagrangian（一形式）あるいはHamiltonian（スカラー）の変換を考え、ジャイロ位相依存性が除去できる変換の生成子を見つける。

Lie変換の概要：具体的手続き

- 具体的には、Lagrangianのジャイロ位相依存性を $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1(\xi)\epsilon + \Gamma_2(\xi)\epsilon^2 + \dots$ と考え、 $T_1 = e^{\epsilon L_1}$ を作用すると $\bar{\Gamma} = \Gamma(T_1 Z)$ は

$$\bar{\Gamma} = \Gamma_0 + \underbrace{\epsilon(\Gamma_1 - \mathcal{L}_1 \Gamma_0)}_{\bar{\Gamma}_1} + \underbrace{\epsilon^2 \left(\Gamma_2 - \mathcal{L}_1 \Gamma_1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^2 \Gamma_0 \right)}_{\bar{\Gamma}_2} + \dots$$

となる (\mathcal{L} は L によるLie微分)。

- $\bar{\Gamma}_1 = (\Gamma_1 - \mathcal{L}_1 \Gamma_0)$ の部分で、 $O(\epsilon)$ の項からジャイロ位相依存性を取り除くような L_1 を見つけてやれば、変換後の $\bar{\Gamma}_1$ はジャイロ位相依存性を持たない。
- ただ一般には、 $\epsilon^2 \left(\Gamma_2 - \mathcal{L}_1 \Gamma_1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^2 \Gamma_0 \right)$ (およびそれ以降) までもジャイロ位相依存性が消えような都合のいい L_1 は見つからない。
- よって、任意のオーダーでジャイロ位相への依存性を取り除くため、 $T_2 = e^{\epsilon^2 L_2} \dots$ などを合わせた合成演算子

$$T_\epsilon = \dots T_3 T_2 T_1 = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n L_n}$$

を用い、順次ジャイロ位相依存性を取り除いていく \Rightarrow Lie変換摂動論。

2. ジャイロ運動論的モデル：ジャイロ運動論的方程式

- 結果，ジャイロ位相依存性を持たないLagrangianが得られ，そこから運動方程式（スラブ配位）

$$\frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} = \left(\mathbf{b} + \epsilon_\delta \frac{\nabla \langle \psi \rangle_\xi \times \mathbf{b}}{B_0} \right) \bar{U} + \epsilon_\delta \frac{\mathbf{b} \times \langle \phi \rangle_\xi}{B_0} + O(\epsilon^2)$$

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = -\frac{e_s}{m_s} \left(\epsilon_\delta \epsilon_\omega \frac{\partial \langle \phi \rangle_\xi}{\partial z} + \epsilon_\delta \epsilon_\omega \frac{\partial \langle \psi \rangle_\xi}{\partial t} + \epsilon_\delta^2 \frac{1}{B_0} \{ \langle \phi \rangle_\xi, \langle \psi \rangle_\xi \} \right) + O(\epsilon^3)$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{dt} = 0$$

が導かれる。

- こうして，粒子座標系 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \Rightarrow$ ガイディングセンター座標系 $(\mathbf{X}, U, \mu) \Rightarrow$ ジャイロ中心座標系 $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu})$ の変換を経て，ジャイロ運動論的Vlasov方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{X}}} + \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{U}} \right) \bar{F}_s = 0$$

が得られる。

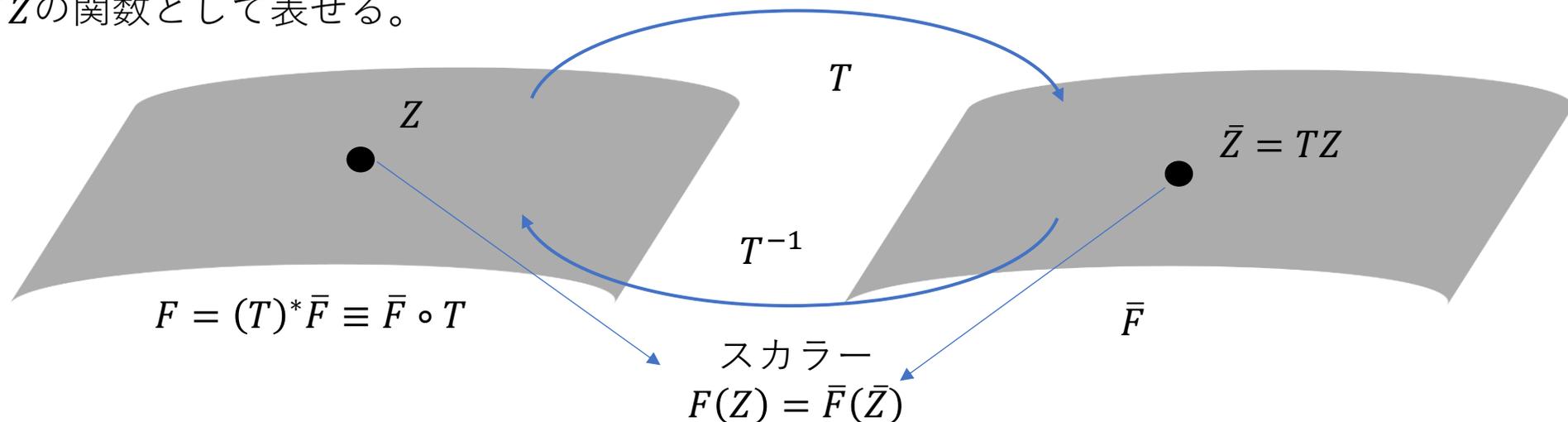
- Frieman-Chenの導出法では，このように分布関数と運動方程式をそれぞれ独立に，任意の次数まで展開できない。

2. 電磁場の評価：ガイディングセンター-pull-back

- 電磁場は，粒子位置 \mathbf{x} の分布から求められる。
- 粒子位置の分布は，ガイディングセンター分布 $F(\mathbf{Z})$ から求まるため，ジャイロ中心分布をガイディングセンター座標系で考えたい。e.g.,

$$n(\mathbf{x}) = \int d^3v F(\mathbf{Z}) \delta(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho} - \mathbf{x})$$

- しかし，ジャイロ運動方程式的方程式の解として得られるのはジャイロ中心分布 $\bar{F}(\bar{\mathbf{Z}})$
- M 上のスカラー関数である F は， \bar{M} 上のスカラー関数 \bar{F} を**引き戻し (pull-back)** したものとみなせば， \bar{F} を用いて Z の関数として表せる。



2. 電磁場の評価：ガイディングセンター-pull-back

簡単な話ではTaylor展開

- ガイディングセンター相空間上への分布関数のpull-backは
$$\bar{F}(Z + \{S_1, Z\}) \simeq \bar{F}(Z) + \{S_1, Z^i\} \frac{\partial \bar{F}(Z)}{\partial Z^i}$$
$$F = (T)^* \bar{F} = \bar{F} + \{S_1, \bar{F}_0\} + O(\epsilon^2)$$

のように変換される (\bar{F} はジャイロ中心相空間上の関数だが、引数はガイディングセンター座標)。

- 具体的には

$$F_1 = \bar{F}_1 - e(\phi - \langle \phi \rangle_\xi) \frac{\partial F_0}{B_0 \partial \mu} + ev_{\parallel} (A_{\parallel} - \langle A_{\parallel} \rangle_\xi) \frac{\partial F_0}{B_0 \partial \mu} - \frac{e}{m} (A_{\parallel} - \langle A_{\parallel} \rangle_\xi) \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}}$$

のように、電磁場の揺動に依存する。

- 等方なMaxwellianのように

$$\frac{1}{mv_{\parallel}} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} = \frac{\partial F_0}{B_0 \partial \mu}$$

という関係が成り立つ場合

$$F = \bar{F} - e(\phi - \langle \phi \rangle_\xi) \frac{\partial F_0}{B_0 \partial \mu}$$

となり、スカラーポテンシャル揺動のみを含む形になる。

2. ジャイロ運動論的モデル：なじみ深い形式

以降, overbarを外し, U を v_{\parallel} で表し, などとし, $F_s = F_{sM} + \delta f_s$ などとすると

■ ジャイロ運動論的方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\parallel} \mathbf{b}^* \cdot \nabla + \tilde{\mathbf{v}}_E \cdot \nabla \right) \delta f_s = v_{\parallel} \frac{e_s F_{sM}}{T_s} \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{E} J_{0s} + C_s$$

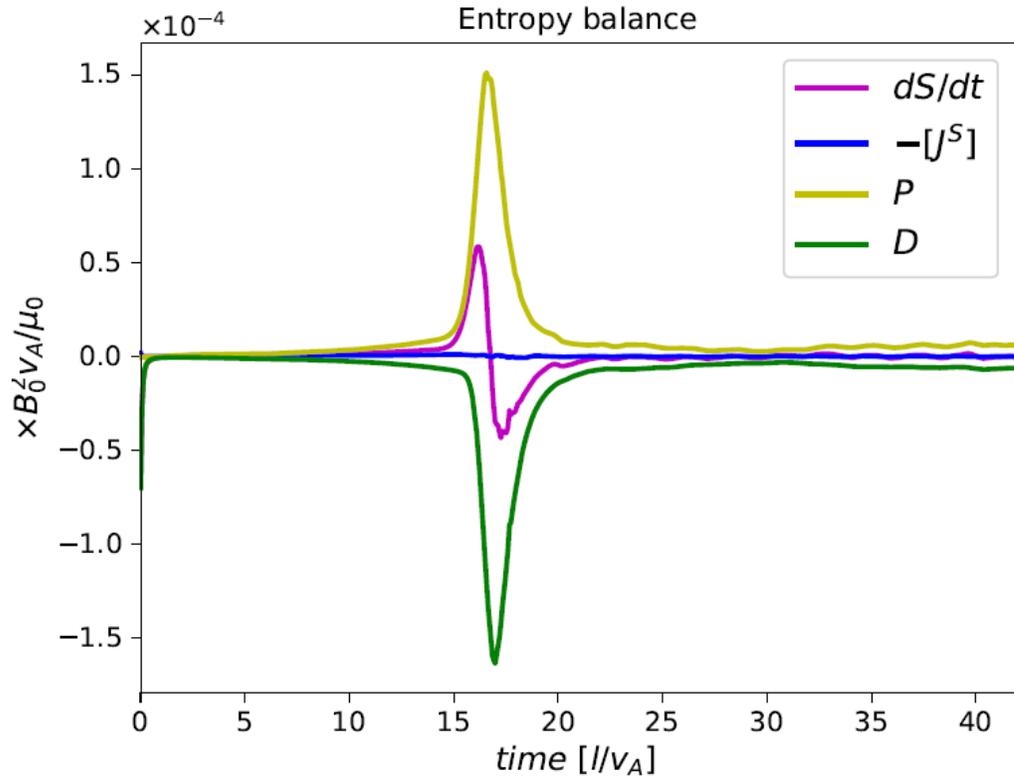
■ Poisson's equation

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_s e_s \left[\int d^3v \delta f_s J_{0s} - \frac{e_s n_s}{T_s} \phi (1 - \Gamma_{0s}) \right]$$

■ Ampère's law

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -\mu_0 j_{\parallel} = -\mu_0 \sum_s \int d^3v v_{\parallel} \delta f_s J_{0s}$$

3. 計算とその結果：磁気圏のエネルギーバランス



$$\frac{d}{dt} \int dz S = -[J_{\parallel}^S]_{l=0}^{l=l} + \int dz \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle + \int dz D$$

$$S = \sum_s T_s \int d^3v \sum_{k_{\perp}} \frac{|\delta f_{sk_{\perp}}|^2}{2F_{sM}} : \text{エントロピー変数}$$

$$J_{\parallel}^S = \sum_s T_s \int d^3v \sum_{k_{\perp}} v_{\parallel} \frac{|\delta f_{sk_{\perp}}|^2}{2F_{sM}} : \text{エントロピーフラックス}$$

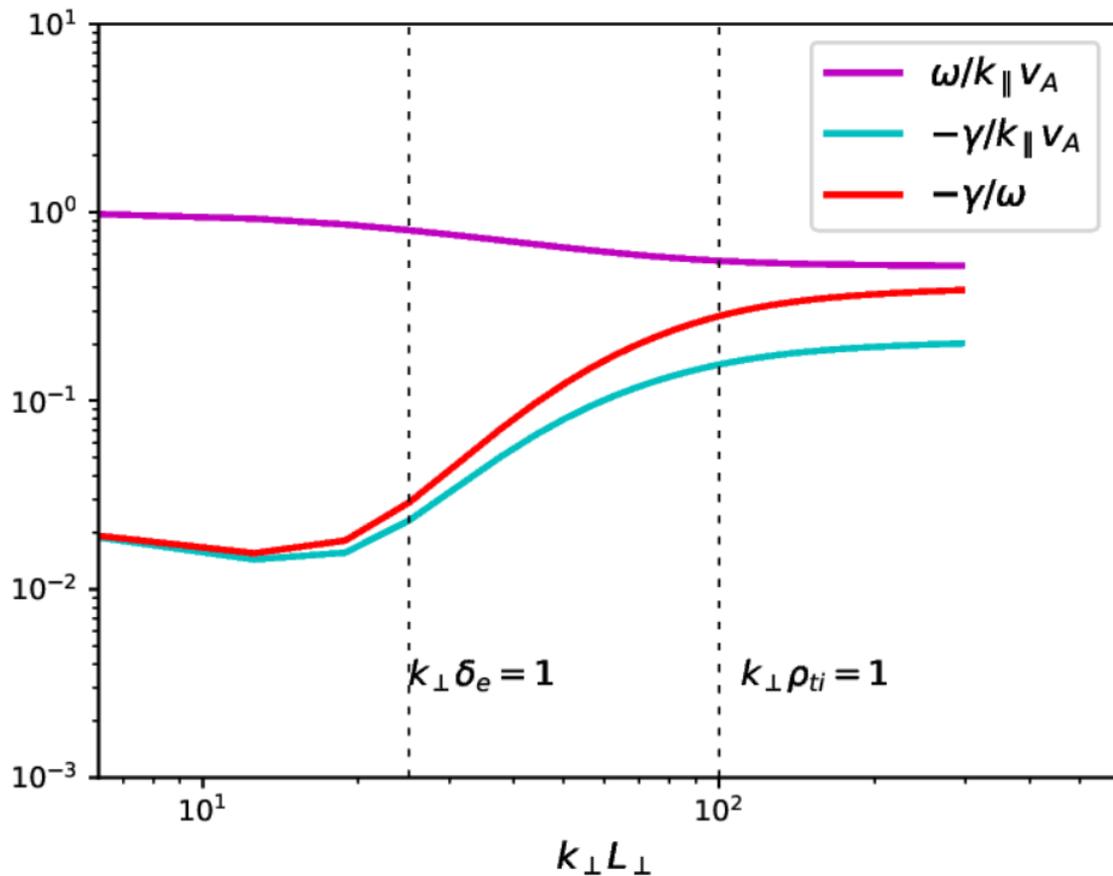
$$\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \text{Re} \sum_{k_{\perp}} \left[j_{\parallel k_{\perp}}^* \left(-\nabla_{\parallel} \phi_{k_{\perp}} - \frac{\partial \psi_{k_{\perp}}}{\partial t} \right) \right] : \text{エネルギー交換}$$

$$D = \sum_s \int d^3v \sum_{k_{\perp}} \frac{T_s}{F_{sM}} C_{sk_{\perp}} - \nu_H \int d^3v \sum_{k_{\perp}} k_{\perp}^8 \frac{|\delta f_{sk_{\perp}}|^2}{F_{sM}} : \text{散逸}$$

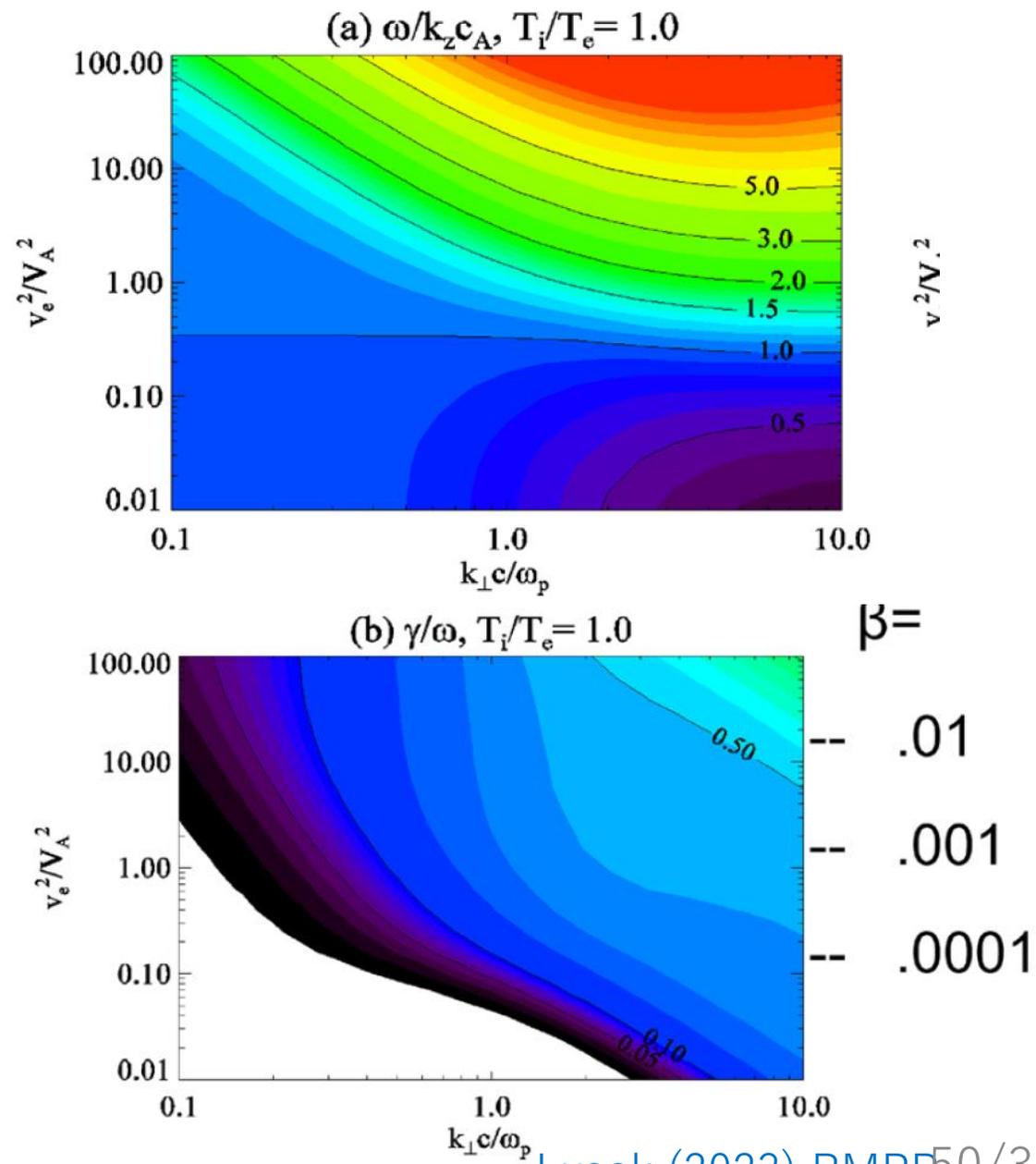
$\int dz \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle > 0 \Rightarrow$ 場から粒子への正味のエネルギー転移。

平行電場 $-\nabla_{\parallel} \phi_{k_{\perp}} - \frac{\partial \psi_{k_{\perp}}}{\partial t}$ を介した相互作用による、波から粒子へのエネルギー転移が、特に非線形飽和フェーズにかけて大きな寄与をしていることが確認できる

β と減衰率

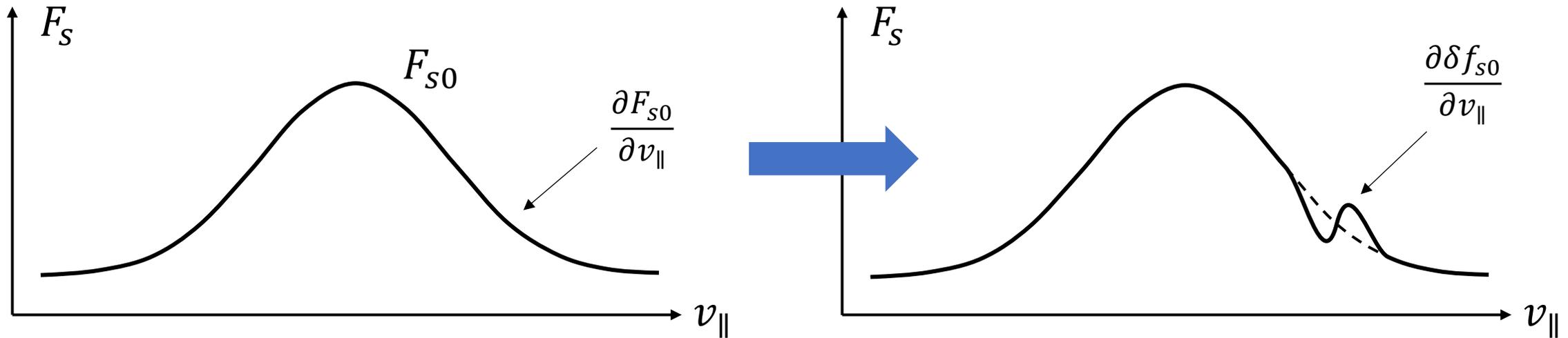


ケースA ($v_{te}^2/v_A^2 = 0.0625$) の分散関係 ($k_x = 0, k_{\perp} = k_y$) から計算した減衰率



3. 非線形加速項の導入：項の役割

1次元速度分布

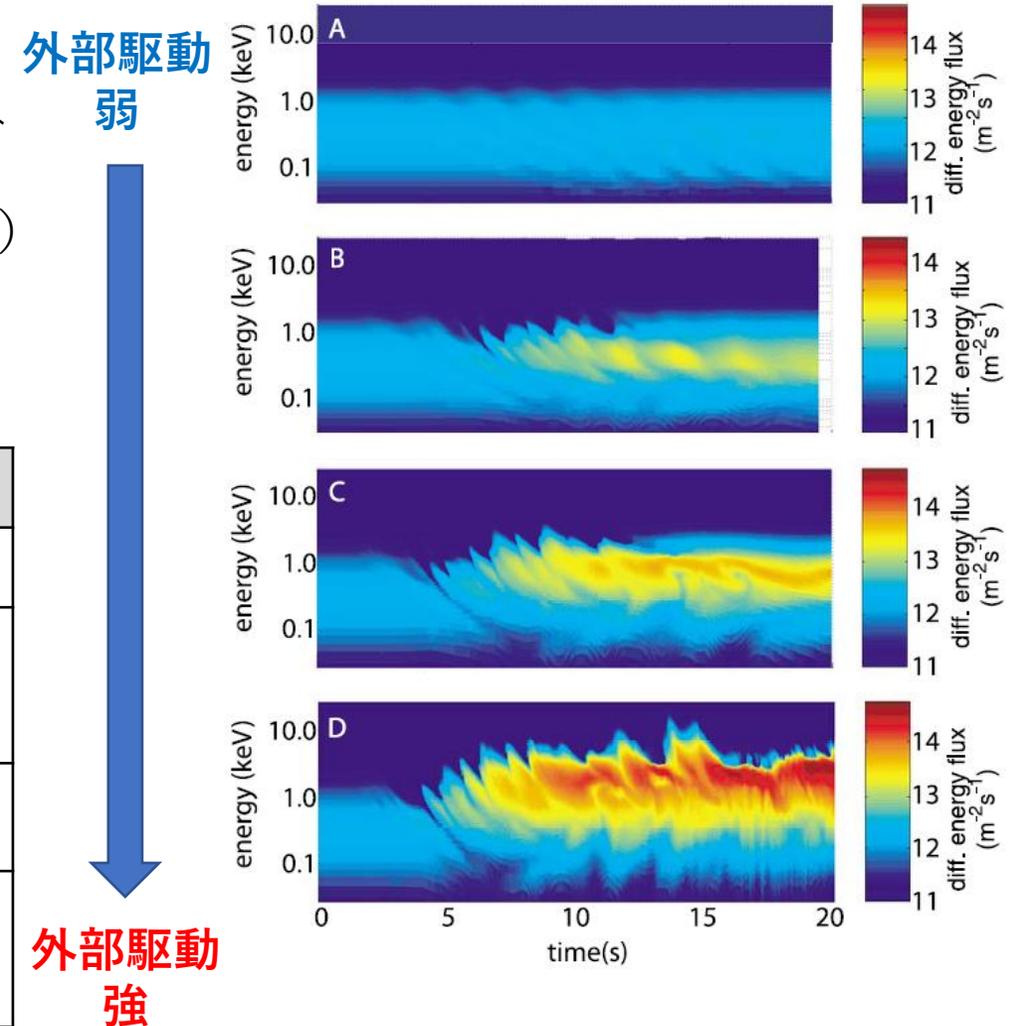


- 平行電場 $E_{||}$ を介した線形な共鳴相互作用の結果，背景分布の速度勾配 $\partial F_{s0}/\partial v_{||}$ に応じて速度分布形状が変化する。
- そこで新たに生じる勾配 $\partial \delta f_{s0}/\partial v_{||}$ と平行電場 $E_{||}$ の結合による非線形効果により，より複雑な特殊な速度分布構造の形成や，粒子捕捉による加速などが生じうる。

3. 非線形加速項の導入：先行研究との比較

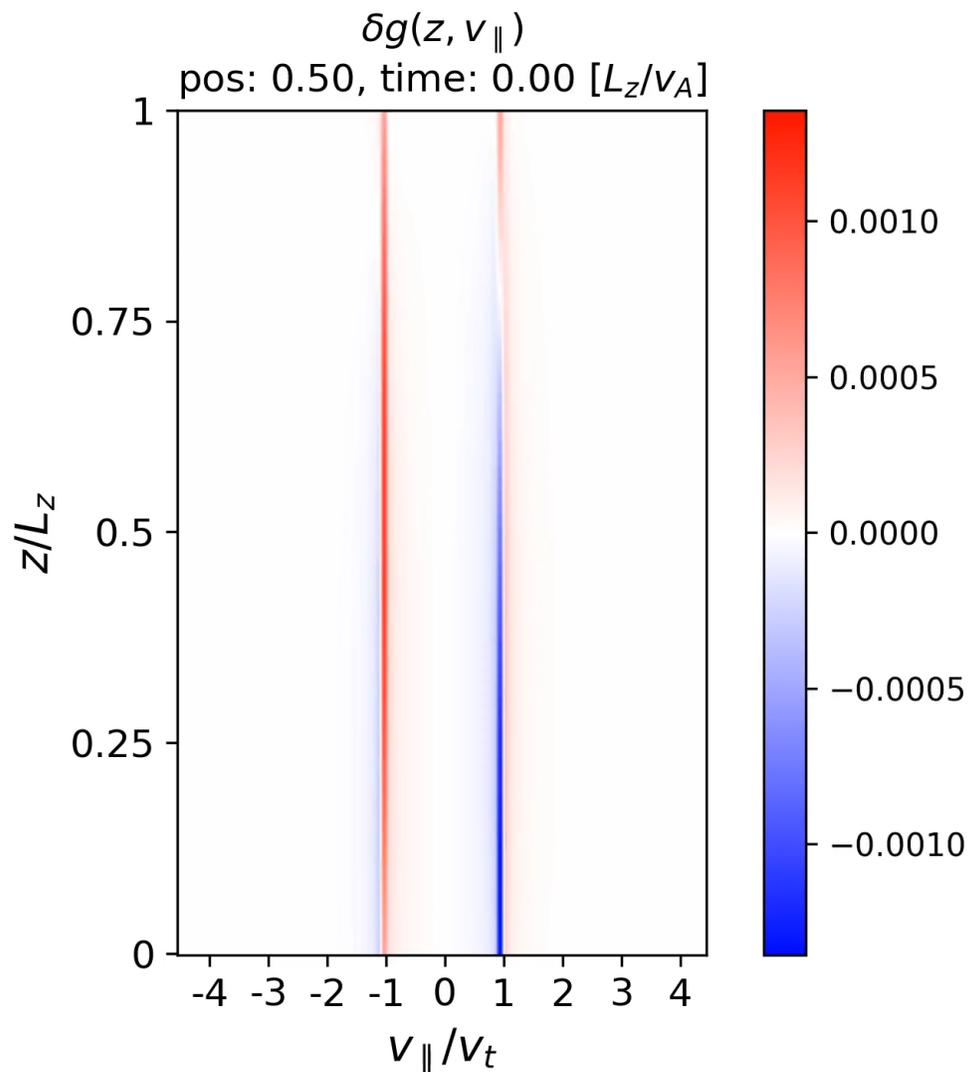
- 右図はWatt & Rankin (2010) の**DK-1D**コードによる降り込み電子（ピッチ角 0° ）の微分エネルギーフラックス計算の結果
- 背景電子の熱運動エネルギー $T_e = 200\text{eV}$ に対し、10倍（2keV）から50倍（10keV）ほどのエネルギーが得られている。
- 本研究では、10倍から、部分的に40倍ほど。

	GKV計算	DK-1D計算
空間次元	3次元	1次元
分布関数の計算法	δf 法 背景分布はMaxwellian	full- f 初期分布：カップパ分布 ($\kappa = 5$)
粒子種	ジャイロ運動論的 電子&陽子	ドリフト運動論的電子
配位	スラブ配位+電離層	双極子磁場 (動径距離 $\sim 2R_E$ から $\sim 7R_E$)
駆動源	フィードバック不安定性	外的な静電ポテンシャルパルス



Watt & Rankin (2010) Do magnetospheric shear Alfvén waves generate sufficient electron energy flux to power the aurora? 52/33

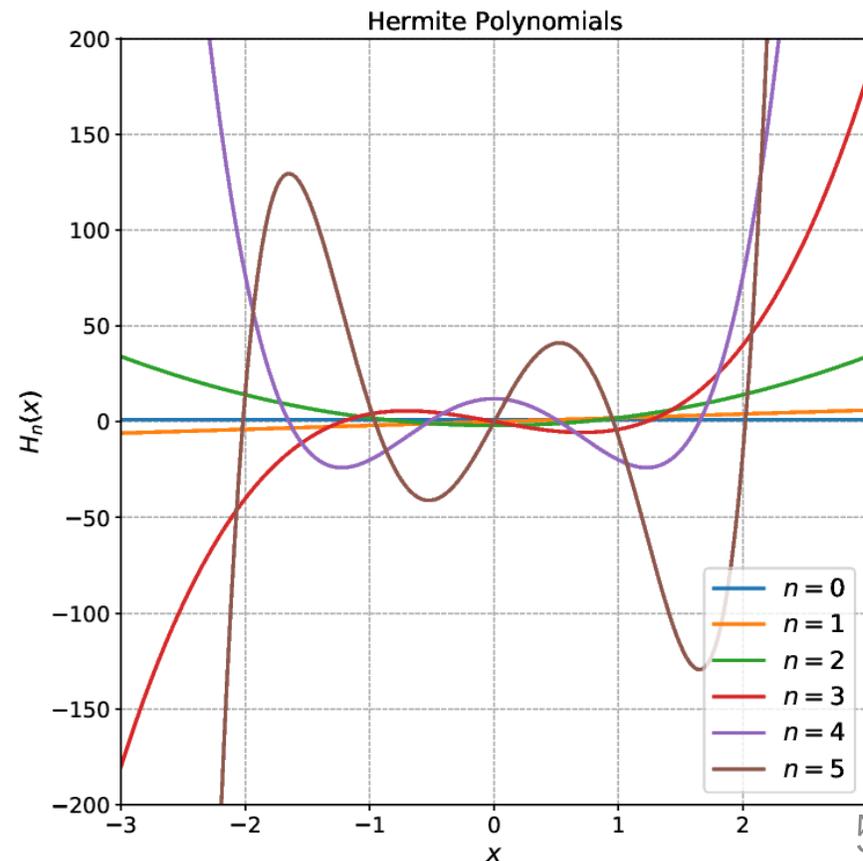
Hermite多項式



$$\delta f_e = \frac{1}{n_{e0}} \left(\delta n_e + \frac{v_{\parallel}}{v_{te}^2} u_{e\parallel} \right) F_{0e} + \delta g_e$$

$$\delta g_e(v_{\parallel}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{\sqrt{2^m m!}} \delta \hat{g}_m F_{0e}(v_{\parallel}), \quad x = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2} v_{te}}$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2$$



PNL項の計算法

$$\frac{dX}{dt} = v_{\parallel} \left(\mathbf{b} + \epsilon_{\delta} \frac{\nabla \langle \psi \rangle_{\xi} \times \mathbf{b}}{B_0} \right) + v_E + O(\epsilon^2) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = & -\frac{\mu \nabla_{\parallel} B_0}{m_s} - \frac{e_s}{m_s} \left(\epsilon_{\delta} \nabla_{\parallel} \langle \phi \rangle_{\xi} + \epsilon_{\delta} \epsilon_{\omega} \frac{\partial \langle \psi \rangle_{\xi}}{\partial t} \right) \\ & + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (22)$$

Then, the gyrokinetic equation reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_{sk_{\perp}}}{\partial t} + v_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla \delta f_{sk_{\perp}} + \frac{J_{0s}}{B_0} \{ \phi - v_{\parallel} \psi, \delta f_s \}_{k_{\perp}} \\ + \frac{e_s}{m_s} \sum_{k'_{\perp} + k''_{\perp} = k_{\perp}} \tilde{E}_{\parallel k'_{\perp}} \frac{\partial \delta f''_{sk_{\perp}}}{\partial v_{\parallel}} = -\frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{\parallel k_{\perp}} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} + C_{sk_{\perp}} \end{aligned} \quad (23)$$

In the code, we also use the modified distribution

$$\delta f_{sk_{\perp}}^{(h)} = \delta f_{sk_{\perp}}^{(h)} + \frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{\parallel k_{\perp}} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} \quad (24)$$

PNL項の計算法

We first rewrite the gyrokinetic equation (23) as

$$\frac{\partial \delta f_{sk_\perp}^{(h)}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \delta f_{sk_\perp}^{(h)}}{\partial t} \right)^* + \frac{e_s}{m_s} \sum_{k'_\perp + k''_\perp = k_\perp} \frac{\partial \psi_{k'_\perp} J_{0s}(k'_\perp)}{\partial t} \frac{\partial \delta f_{sk_\perp}''}{\partial v_\parallel} \quad (25)$$

where $(\partial \delta f_{sk_\perp}^{(h)} / \partial t)^*$ represents all the term in (23) except the inductive term. Multiplying the equation by $\mu_0 e_s v_\parallel J_{0s}$, taking the species sum, integrating over the velocity space and using Ampere's law lead to

$$\begin{aligned} C \frac{\partial \psi_{k_\perp}}{\partial t} = & \mu_0 \sum_s e_s \int d^3 v v_\parallel \left(\frac{\partial \delta f_{sk_\perp} J_{0s}}{\partial t} \right)^* \\ & + \mu_0 \sum_s \frac{e_s^2}{m_s} \int d^3 v v_\parallel J_{0s}(k_\perp v_\perp) \\ & \times \sum_{k'_\perp + k''_\perp = k_\perp} \frac{\partial \psi_{k'_\perp}}{\partial t} J_{0s}(k'_\perp v_\perp) \frac{\partial \delta f_{sk_\perp}''}{\partial v_\parallel}, \end{aligned} \quad (26)$$

where

$$C = k_\perp^2 + \mu_0 \sum_s \frac{e_s^2}{m_s} \int d^3 v J_{0s}^2 F_{s0} \quad (27)$$

Then, by integrating by parts, we have a nonlinear equation to determine the change rate of the vector potential

$$\frac{\partial \psi_{k_\perp}}{\partial t} = \mu_0 C^{-1} \sum_s e_s \int d^3 v v_\parallel \left(\frac{\partial \delta f_{sk_\perp} J_{0s}}{\partial t} \right)^* + \text{NL}. \quad (28)$$

where NL is the nonlinear term

$$\begin{aligned} \text{NL} = & -\mu_0 C^{-1} \sum_s \frac{e_s^2}{m_s} \int d^3 v J_{0s}(k_\perp v_\perp) \\ & \times \sum_{k'_\perp + k''_\perp = k_\perp} \frac{\partial \psi_{k'_\perp}}{\partial t} J_{0s}(k'_\perp v_\perp) \delta f_{sk_\perp}'' \end{aligned} \quad (29)$$

Note that this equation is a differential equation for ψ_{k_\perp} , but to determine the parallel electric field, what we need is the time derivative $\partial \psi_{k_\perp} / \partial t$. Thus, by iteratively solving this equation for $\partial \psi_{k_\perp} / \partial t$ and substituting the solution into (25), we can construct the parallel nonlinear term only from the values at the previous time step.

Differential energy flux

■ Definition

- Energy flux is defined by

$$Q \propto \int v^3 \delta f d^3v \propto \int v^5 \delta f dv = \int v^4 \delta f v dv$$

- Thus, the contribution from $[E, E + dE] = [v^2, v^2 + 2v dv]$ is

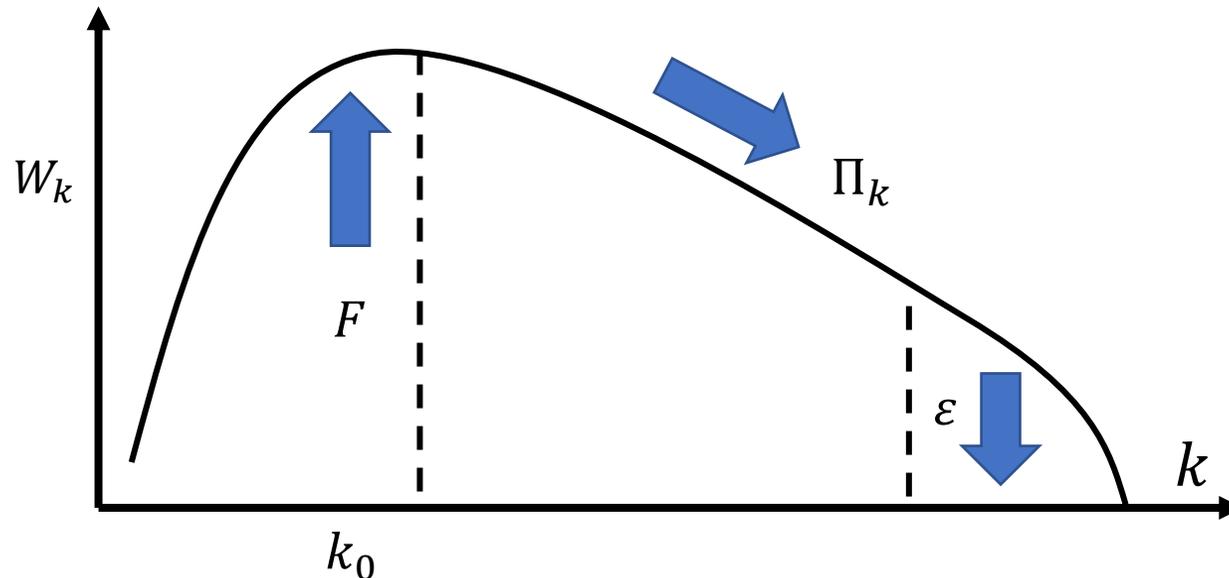
$$J(v) \propto \delta f(v) v^4$$

Properties of dispersive Alfvén waves

■ Constant energy flux cascade

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_k}{\partial k} - 2\gamma W_k + F\delta(k-k_0) - \varepsilon$$

- In the inertial range, where the energy input and dissipation can be ignored ($F \simeq \varepsilon=0$), the energy flux Π_k is scale-independent at a stationary state ($\partial \Pi_k / \partial k = 0$).
- Then, $\Pi_k \sim \int dk \frac{W_k}{\tau}$ and τ determine the k -dependence of W_k .
- In our case, the time scale of the perpendicular nonlinear interaction can be estimated from the $E \times B$ velocity v_E as $\tau \sim 1/(k_{\perp} v_E) \sim 1/(k_{\perp}^2 \phi)$



Alfven turbulence: critical balance

■ Critical balance and damping rate

- In Alfven turbulence, the time scales of perpendicular nonlinear process τ_{\perp} and parallel linear process $\tau_{\parallel} \sim \omega^{-1}$ balance
- Thus, we can estimate the amount of linearly damped energy ΔW_k during the nonlinear process as

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} \sim \omega W_k = -2\gamma W_k \Rightarrow \Delta W_k \simeq \frac{2\gamma}{\omega} W_k$$