

プラズマ乱流の解空間構造に基づく輸送モデリング

ぬなみ まさのり

沼波 政倫

核融合科学研究所 メタ階層ダイナミクスユニット

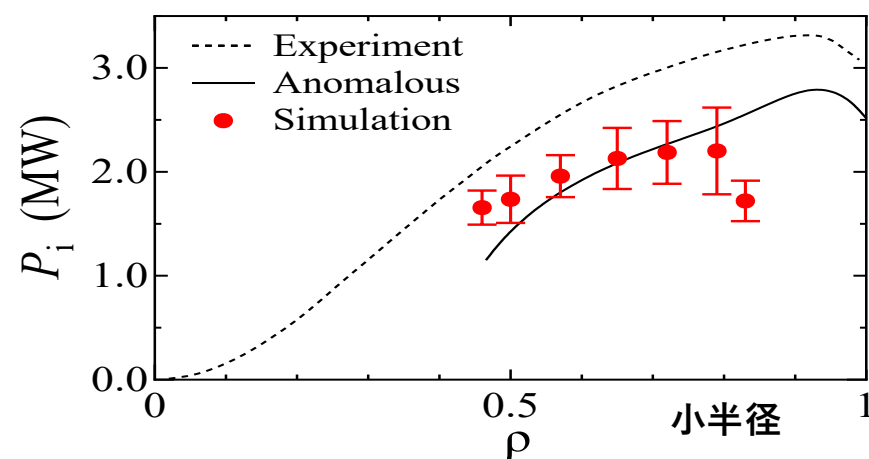


磁場閉じ込めプラズマ乱流のGKシミュレーション

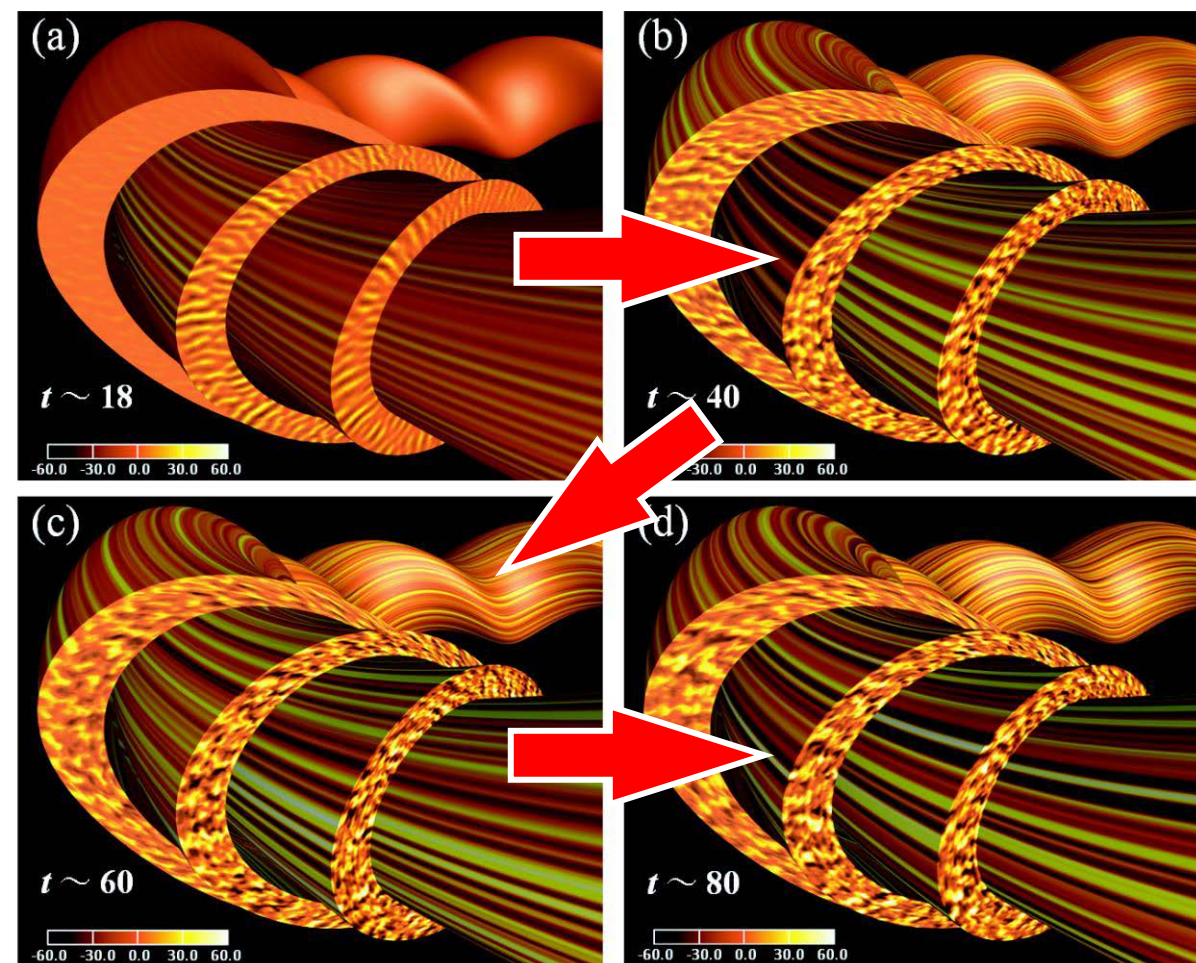
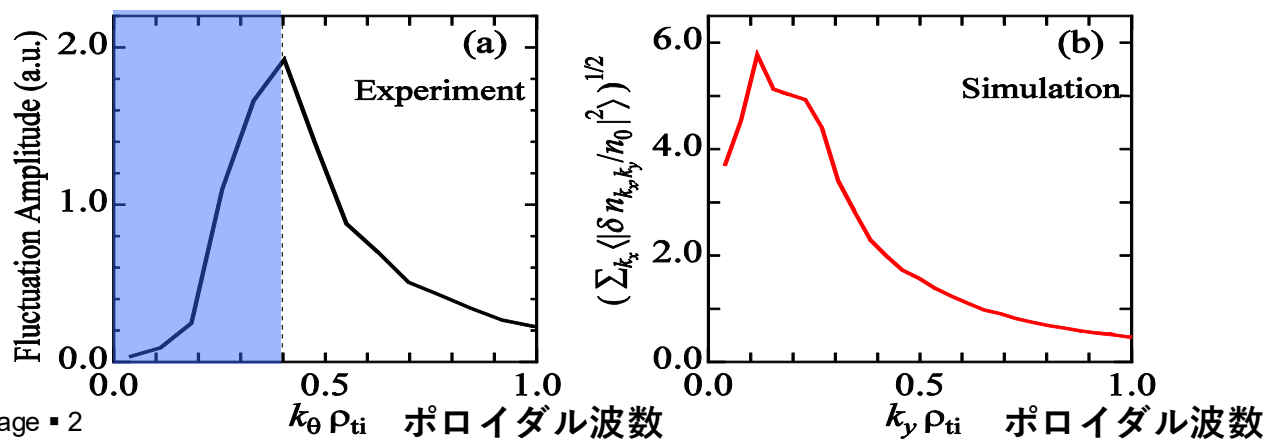
- 実験での輸送フラックスを定量的に再現
- 乱流スペクトルに対しても再現

M. Nunami+, PoP (2012)

熱輸送フラックスの比較



乱流スペクトルの比較



100万コア時間/1ケース以上計算資源を要する

どうして輸送モデル？

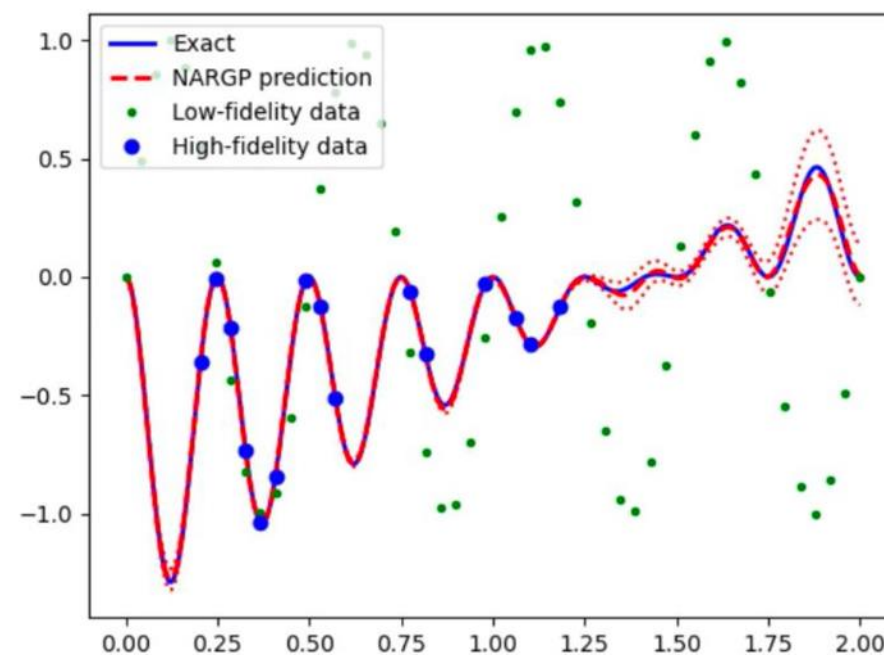
- 乱流輸送は、多数の物理過程が絡み合った複雑な現象である
- すべての過程を直接取り扱うことは容易ではない
- 原理的には第一原理シミュレーションが解決策となる

補間を超えた予測へ

- データに含まれない領域を予測できるか？
- 機械学習やAIは有力な手法である
- マルチフィデリティ手法も発展している
- しかし...

物理法則に基づく外挿能力は可能か？

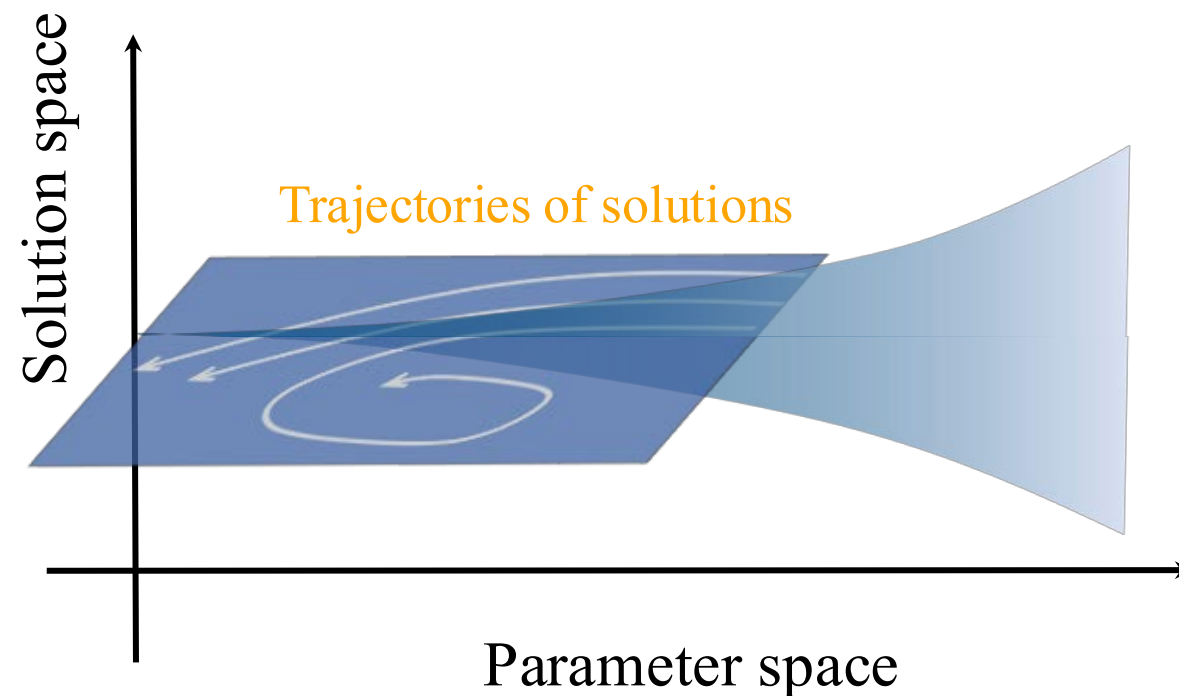
NARGPによるマルチフィデリティ回帰



S. Maeyama+ (2025)

力学系の解空間

- 力学系の解 → 理論相空間上での”軌道”
 - 長時間軌道 → しばしば部分空間に束縛される
 - この部分空間は軌道に依らず普遍的
 - 部分空間をモデリングすることで
普遍性 / 外挿性 を有するモデルが構築できる可能性
- 場の量子論における
Renormalized Trajectory
- 散逸系における
Inertial Manifold



力学系の解空間

Ex.1 : 散逸系における慣性多様体

- ある種の散逸力学系では、状態空間内に存在する不変集合が、すべての軌道を長時間のうちに引き寄せる。
- このとき、系の長時間ダイナミクスは **慣性多様体 (Inertial Manifold)** と呼ばれる低次元部分空間上で記述できる。

C. Foias, G. R. Sell, and R. Temam, J. Differ. Equations (1988).

応用例

- 平面クエット流におけるカオスダイナミクスへの慣性多様体の適用

M. Shimizu, Euromech Colloquium (2014).

- 有限の幅をもつ「近似慣性多様体」 (厳密な慣性多様体ではない) を用いた乱流非予混合燃焼の予測

A. Maryam, AIAA Conf. Proc. (2020).

力学系の解空間

Ex.2 : 場の理論におけるRenormalized trajectory

- 量子場の理論では、繰り込み群（Renormalization Group; RG）変換によって、理論空間上に RG流れ が定義される。
- RG流れの長時間発展（低エネルギー極限）では、軌道が Renormalized Trajectory（RT）と呼ばれる低次元部分空間へ収束することがある。
- RTの存在は、その理論予測可能性と深く関係している。

近似的なRTの利用

- 厳密なRTでなくても、近傍の低次元部分空間による近似が有効な場合がある。この近似は、低エネルギー極限に到達していない領域においても、理論の有効記述や自由度削減に役立つ。（Kubo & Nunami, PTP2004）

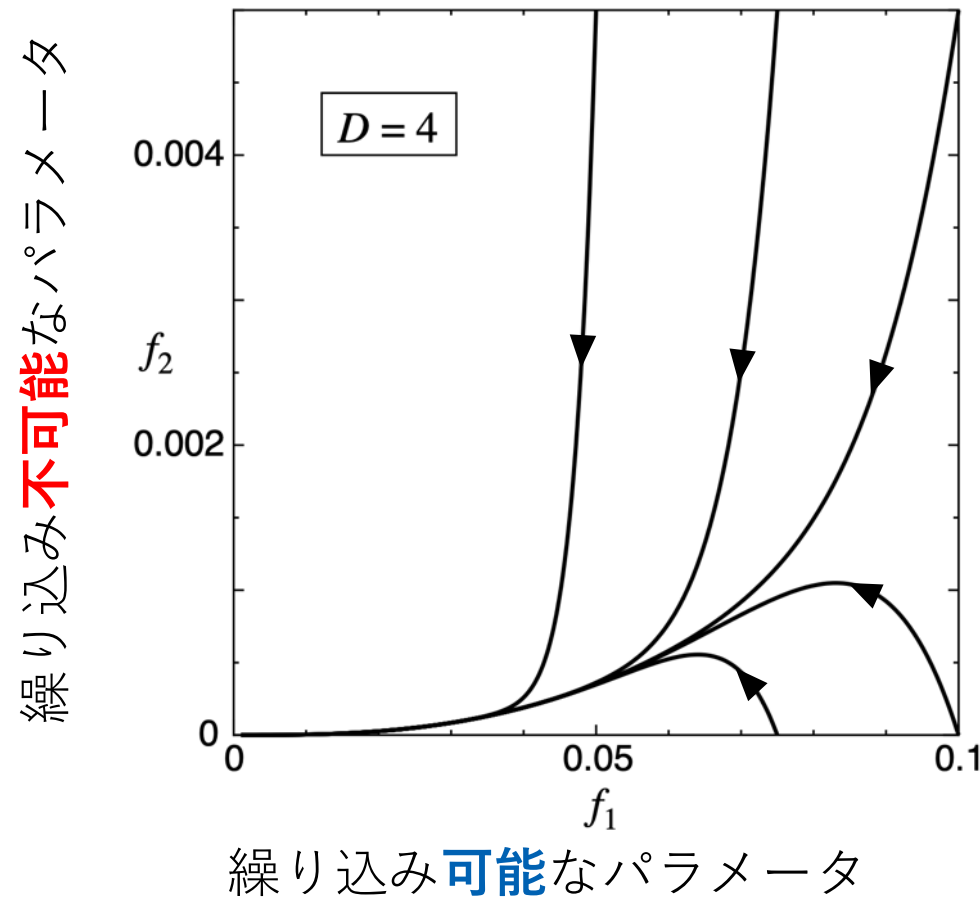
繰り込み群方程式

$$\frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial t} = -\Lambda \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial \Lambda} = \mathcal{O}(S_{\text{eff}})$$

力学系の解空間

Ex.2 : 場の理論におけるRenormalized trajectory

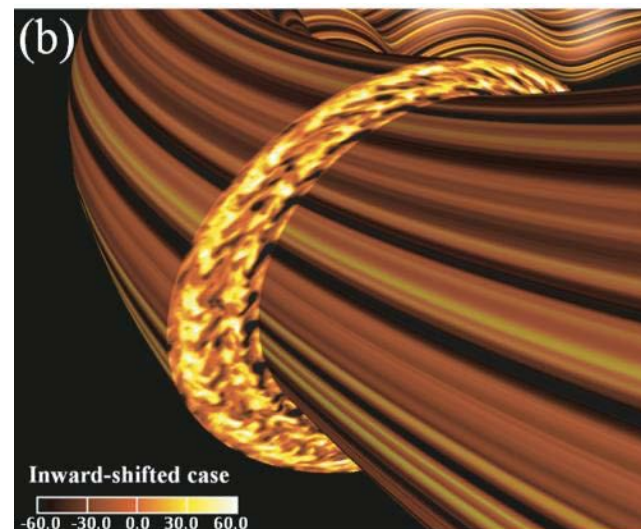
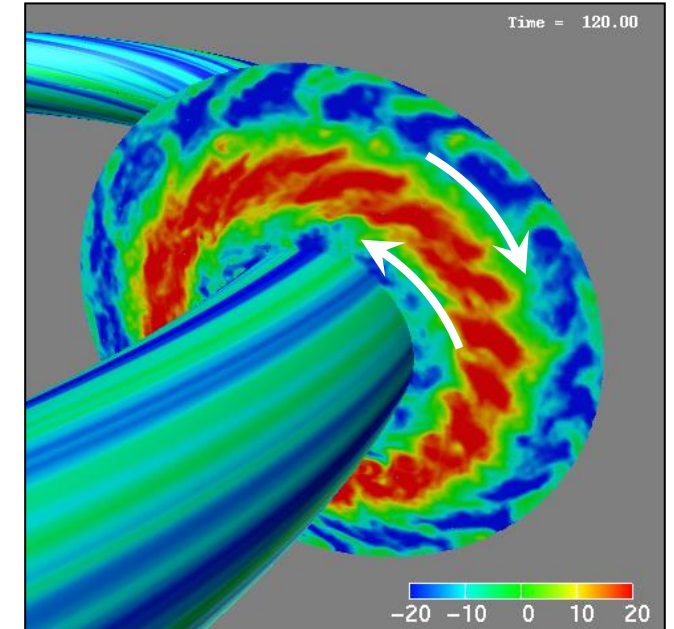
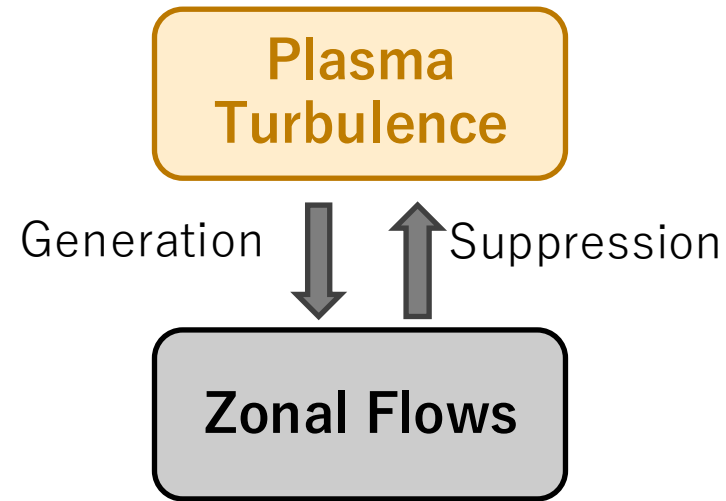
- なぜ素粒子の標準模型は繰り込み可能な相互作用だけで構成されているのか？



ゾーナルフロー

P. Diamond, S. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm, PPCF (2005).

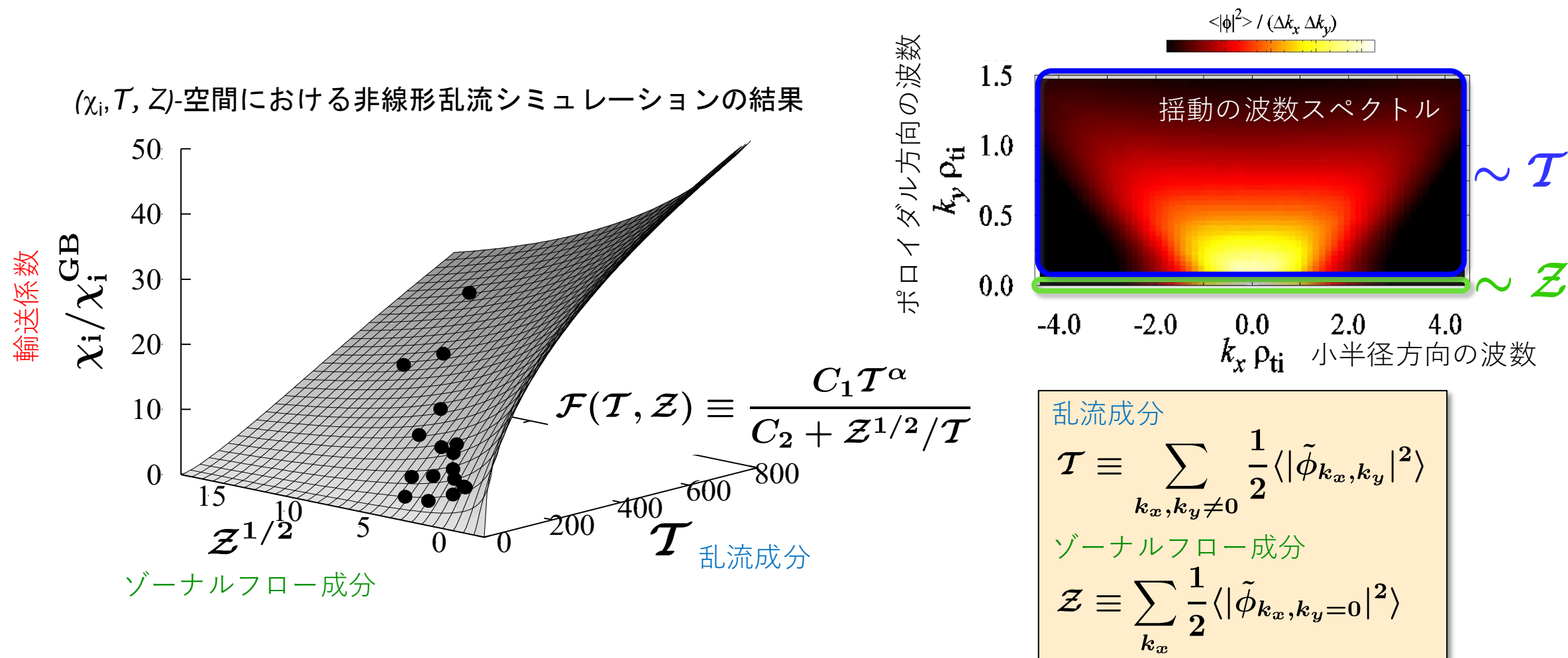
- プラズマ乱流によって帯状の流れ (ゾーナルフロー) が自己生成
- 乱流輸送を抑制する重要な役割
- 木星における帯状流
- 磁場配位形状の制御により能動的に、ZF経路による輸送低減



LHDでのシミュレーション
磁場配位によってZFの
出来具合が変化

乱流とゾーナルフロー、そして輸送

M. Nunami, et al., PoP (2013)



- 様々な条件下でのGK計算結果の**時間平均値**をプロット
- **熱輸送係数 χ_i** が**乱流成分 $\mathcal{T}$** と、**ゾーナルフロー成分 $\mathcal{Z}$** で記述できる

乱流輸送モデリング

Nunami+ (2022)

■ 簡約輸送モデル

- 乱流振幅と帯状流による関数で輸送係数を表現

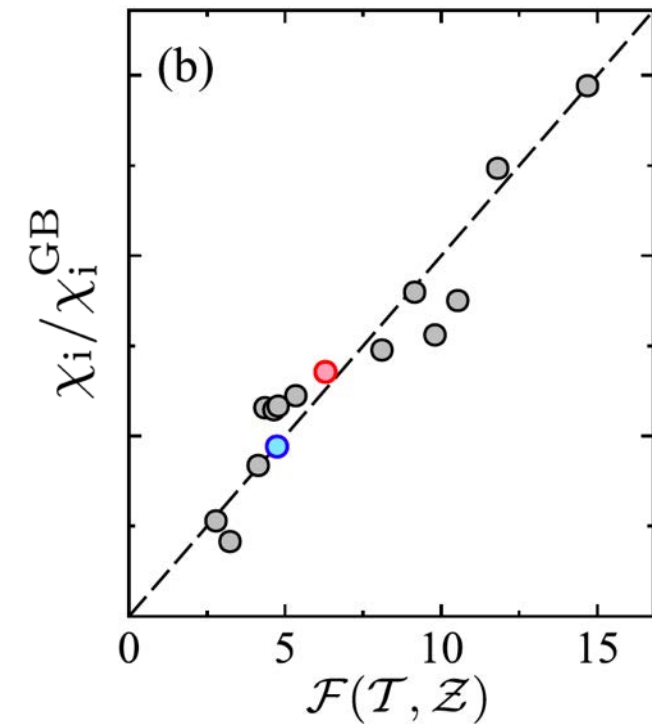
$$\mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) \equiv \frac{C_1 \mathcal{T}^\alpha}{C_2 + \mathcal{Z}^{1/2} / \mathcal{T}}$$

- 線形解析による簡約表現

$$\frac{\chi_i^{\text{model}}}{\chi_i^{\text{GB}}} = \frac{A_1 \left(\sum_k \tilde{\gamma}_k / \tilde{k}_y^2 \right)^\alpha}{A_2 + \tilde{\tau}_{\text{ZF}} / \left(\sum_k \tilde{\gamma}_k / \tilde{k}_y^2 \right)^{1/2}}$$

■ 分布予測への応用

- 温度勾配により再表現されたモデルを輸送解析に適用
- 第一原理計算で補正されたモデルによる分布予測へ



プラズマ乱流輸送における解軌道と解空間

解軌道上の関数関係

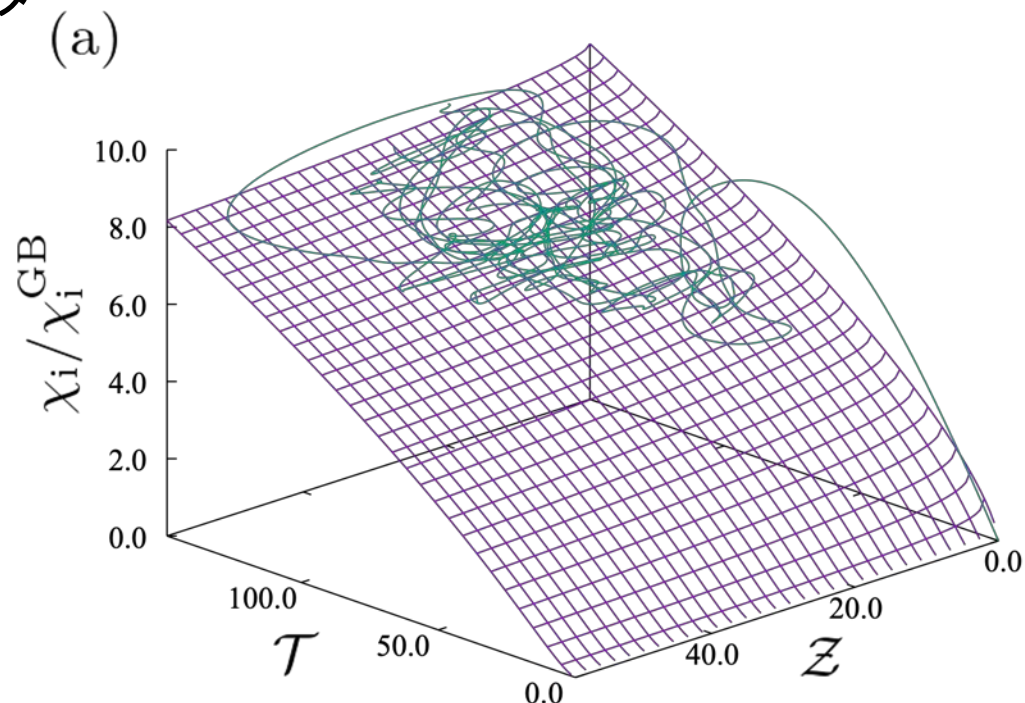
- 各ジャイロ運動論（GK）シミュレーションの時系列データにモデル関数を適用
- 時系列データを回帰データとして扱う
- 誤差関数として絶対誤差を採用し関数を回帰から導出

$$\mathcal{F}^{(\text{new})}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) = \frac{C_1 \mathcal{T}^\alpha}{C_2 + \mathcal{Z}^\beta / \mathcal{T}}$$

解軌道から解空間へ

- 長時間挙動は低次元的な構造に拘束される
 - 解軌道上で得られる関数関係を手掛かりに解空間構造を推定
 - 輸送モデルを解空間の幾何学的構造として捉える
- 解空間構造に基づく外挿能力の獲得

Time evolution GK simulation



Cf. χ に対する最小表現

M. Nunami, et al., APS-DPP (2025).
M. Nunami, et al., in preparation.

- 現象論的要請:

- χ increases with turbulence $\mathcal{T}$ ($\propto \mathcal{T}^\alpha$)
- χ decreases with zonal flow $\mathcal{Z}$
- χ remains finite as $\mathcal{Z} \rightarrow 0$ and vanishes as $\mathcal{T} \rightarrow 0$
- Dependence appears through a combined invariant $\mathcal{Z}^p \mathcal{T}^{-q}$

- Asymptotic and scaling consistency:

- For $\mathcal{T} \rightarrow 0$ or $\mathcal{Z} \rightarrow \infty$ $\chi \rightarrow 0$
- For $\mathcal{T} \rightarrow \infty$ and $\mathcal{Z} \rightarrow 0$ $\chi \sim \mathcal{T}^\alpha$
- Scaling invariance $\chi(\lambda \mathcal{T}, \lambda^{q/p} \mathcal{Z}) = \lambda^\alpha \chi(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$

- 最小表現

$$\chi = \mathcal{F}^{\text{Minimal}}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) = \frac{a \mathcal{T}^\alpha}{1 + b \mathcal{Z}^p \mathcal{T}^{-q}}$$

Cf. χ に対する最小表現

M. Nunami, et al., APS-DPP (2025).

M. Nunami, et al., in preparation.

• ユニバーサリティ:

- Any smooth function satisfying the above asymptotics (e.g. exponential, rational, ...) **asymptotically reduces to the minimal form.**

$$\mathcal{F}^{(\text{exp})} = \mathcal{T}^\alpha \exp(-b\mathcal{Z}^p \mathcal{T}^{-q}), \quad \mathcal{F}^{(\text{rat})} = \mathcal{T}^\alpha / (1 + b\mathcal{Z}^p \mathcal{T}^{-q})^n, \dots$$

• 当初モデルとの関係:

- The empirical model used in above discussions, corresponds to the minimal form with $p = \tilde{\beta}$ and $q = 1$

• 解釈

- The success of the fit implies that the functional form is not ad hoc, but a minimal representation consistent with phenomenological and scaling requirements.

• 最小表現

$$\chi = \mathcal{F}^{\text{Minimal}}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) = \frac{a\mathcal{T}^\alpha}{1 + b\mathcal{Z}^p \mathcal{T}^{-q}}$$

$$p = \tilde{\beta}, \quad q = 1$$


$$\mathcal{F}^{(\text{new})}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) = \frac{C_1 \mathcal{T}^\alpha}{C_2 + \mathcal{Z}^\beta / \mathcal{T}}$$

モデル関数パラメータ空間内の誤差構造

M. Nunami, et al., PPCF (2025).

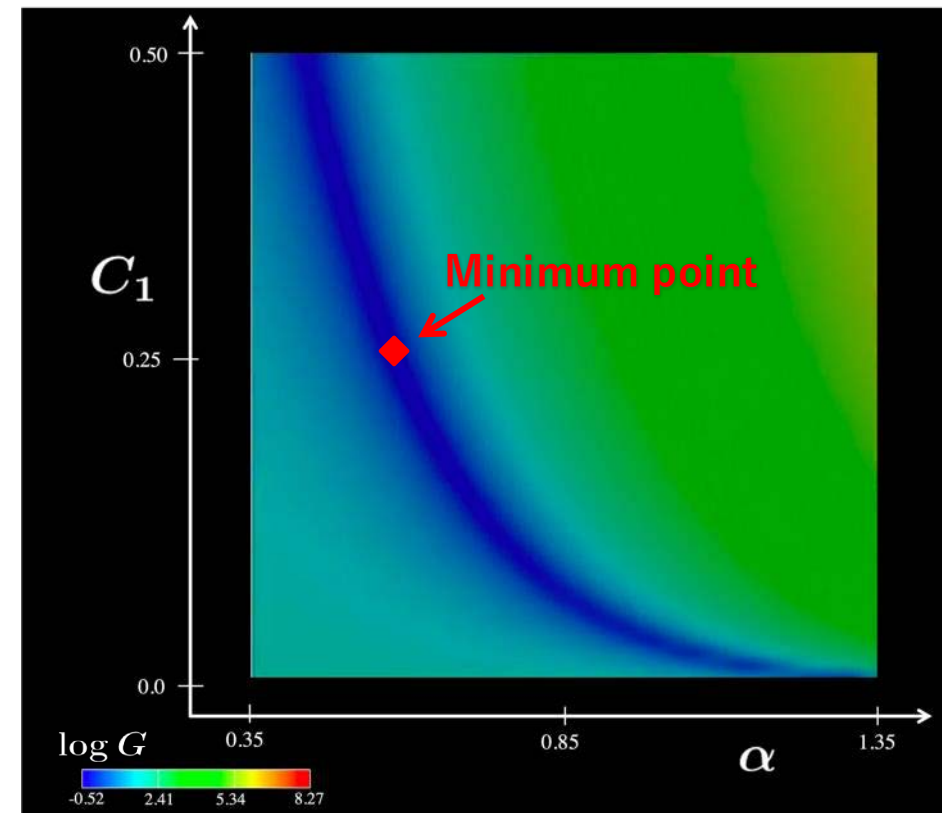
従来の最適化

- **モデル関数のパラメータ空間 $\{C_1, C_2, \alpha\}$ での誤差構造に注目**
- モデルパラメータ空間 $\{C_1, C_2, \alpha\}$ において、目的関数（フィッティング誤差） G の大域的最小値を探索する。

$$G(C_1, C_2, \alpha) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_j^N [\mathcal{F}(t_j) - \tilde{\chi}_i^{\text{GKV}}(t_j)]^2}$$

- 目的関数の等高線は パラメータ空間内に **谷（valley）構造を形成**。
- **関数形を決定する最適値を一意に定めることは容易ではない**

Contour of G in space of $\{C_1, \alpha\}$



$C_2 = 0.63$

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) \equiv \frac{C_1 \mathcal{T}^\alpha}{C_2 + \mathcal{Z}^{1/2}/\mathcal{T}}$$

最適点は回帰データに強く依存

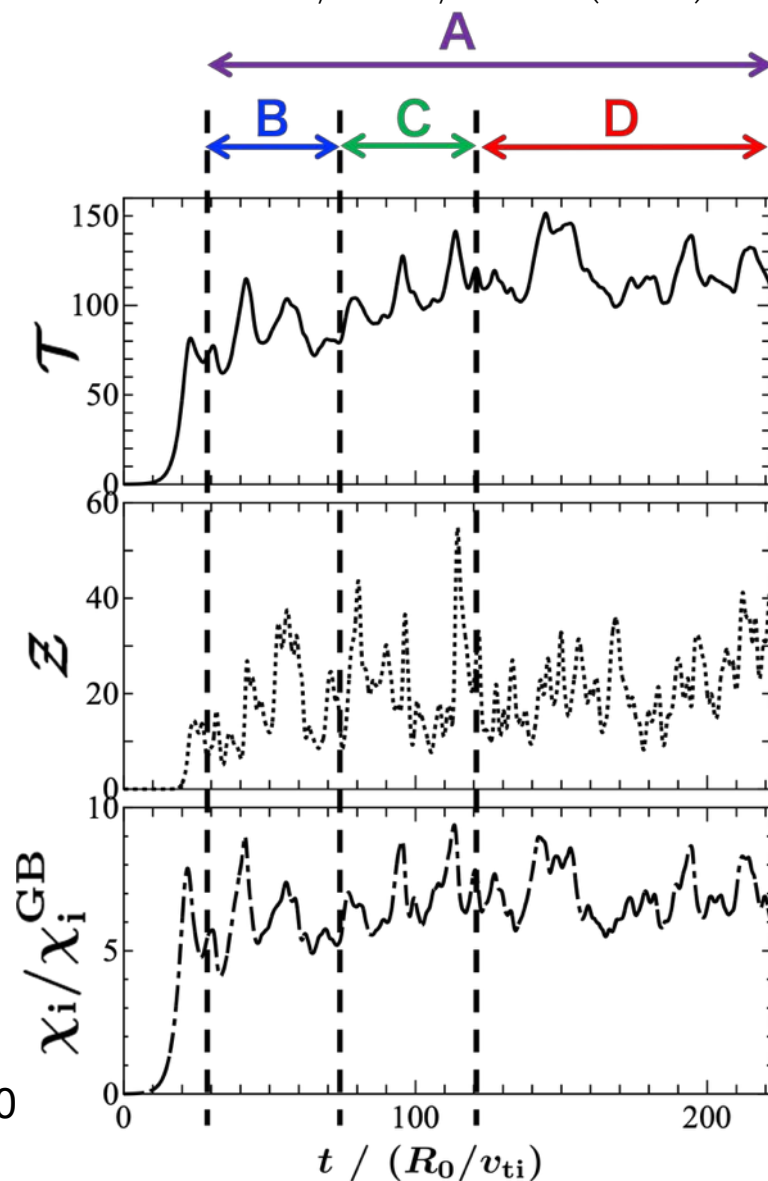
- モデル関数 F に対して

$$\mathcal{F}^{(\text{new})}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) = \frac{C_1 \mathcal{T}^\alpha}{C_2 + \mathcal{Z}^\beta / \mathcal{T}}$$

- 目的関数 (hyper-dimensional manifold) $G^{(\text{new})}$ を考える

$$G^{(\text{new})}(C_1, C_2, \alpha, \beta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_j [\mathcal{F}^{(\text{new})}(t_j) - \tilde{\chi}_i^{\text{GKV}}(t_j)]^2}$$

M. Nunami, et al., PPCF (2025).

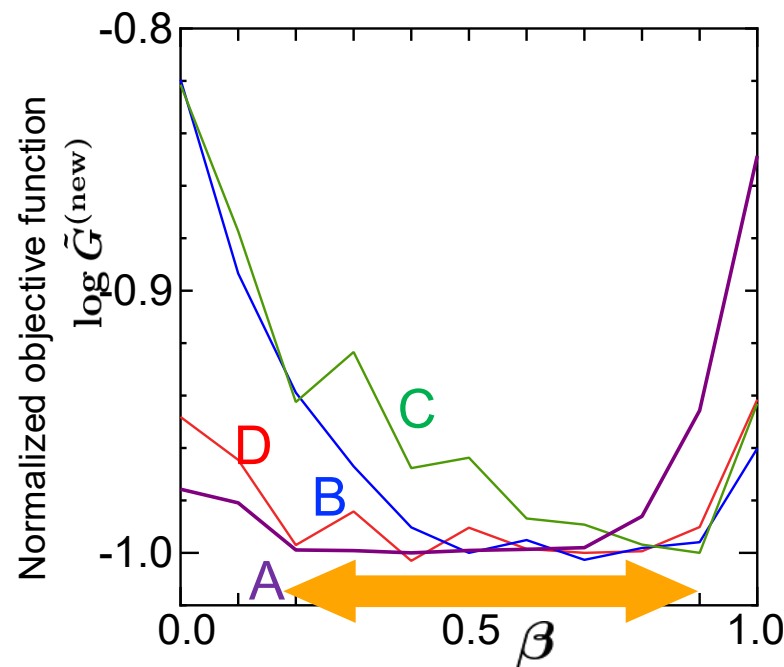


時間窓依存性の導入

- 異なる時間区間をそれぞれ独立回帰データとして扱う。
- 目的関数の最小値は回帰データに依存し、 β 方向に広がる。

→ 一意に最適点を得るのは難しい

→ 最適解は一点ではなく、パラメータ空間内の広がった領域として現れる



$\beta \sim 0.2 - 0.9$

再度、モデルパラメータ空間上の構造

最小値ではなく構造に着目

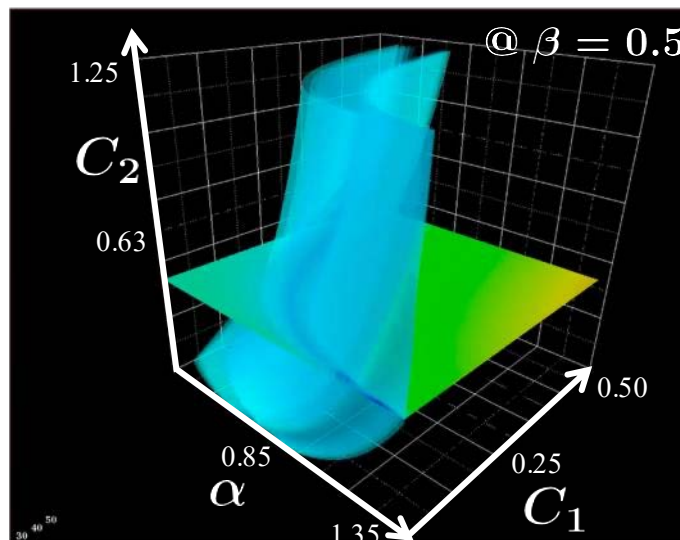
- 大域的最小値は、回帰データによって大きく変化。
- 一方、目的関数 $G^{(\text{new})}$ の最小値そのものではなく、**形成する構造**に着目。
- 各回帰データに対して、モデルパラメータ空間上の $G^{(\text{new})}$ を可視化。

構造の頑健性

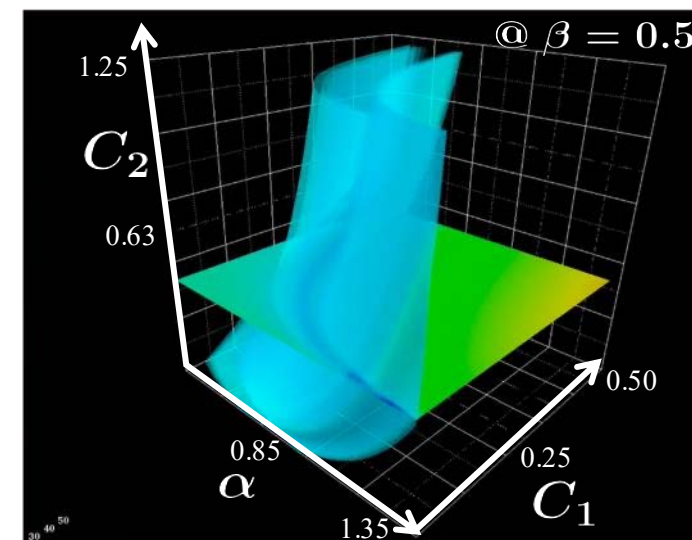
- 回帰データごとに最適解は異なるにもかかわらず、パラメータ空間内に形成される目的関数の形状はほぼ共通で、**最適点よりも構造そのものが本質的。**

$$\mathcal{F}^{(\text{new})}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) = \frac{C_1 \mathcal{T}^\alpha}{C_2 + \mathcal{Z}^\beta / \mathcal{T}}$$

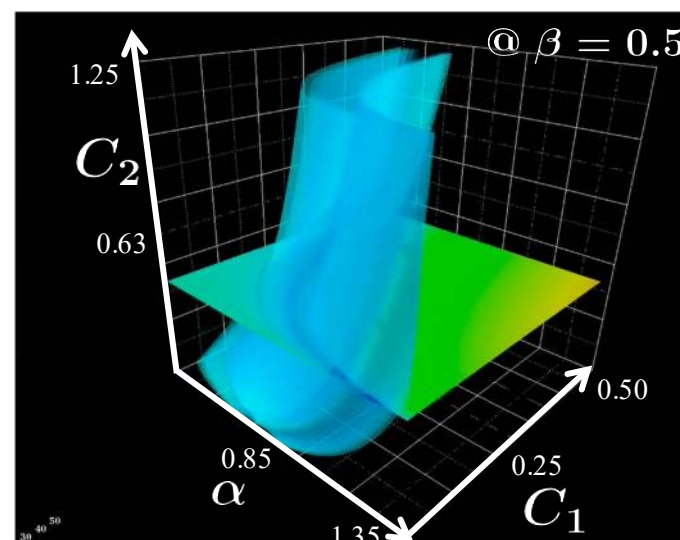
Whole section: A



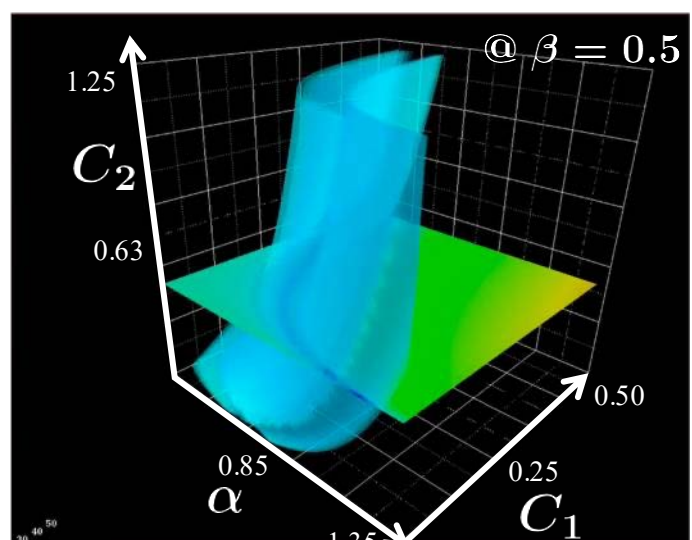
Section: B



Section: C



Section: D



M. Nunami, et al., PPCF (2025).

再度、モデルパラメータ空間上の構造

M. Nunami, et al., PPCF (2025).

目的関数の多様体構造

- パラメータ β を変化させると、目的関数の4次元構造が変化。
- 目的関数は拡張されたパラメータ空間内に構造を形成。

$$G^{(\text{new})}(C_1, C_2, \alpha, \beta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_j [\mathcal{F}^{(\text{new})}(t_j) - \tilde{\chi}_i^{\text{GKV}}(t_j)]^2}$$

- ここで、モデルパラメータ空間における目的関数 G の多様体構造に着目。

最適化の指針

- 従来の目的関数の大域的最小値を探索ではなく、目的関数が形成する多様体構造を評価。
- より狭く (narrower)、より深い(deeper)多様体が、優れたモデルに対応することを期待。

→ 最適点ではなく、構造そのものを最適化

モデルパラメータ空間上での最適化

多様体構造の定量化

- パラメータ β ごとに $G^{(\text{new})} < G_0$ を満たす領域 $V(*)$ を $\{C_1, C_2, \alpha\}$ 空間内に定義。
- この領域内での目的関数 $G^{(\text{new})}$ の積分値を評価。

$$\mathcal{I} = \int_{G < G_0} dV \log G^{(\text{new})}$$

(*) V covers global minimum point

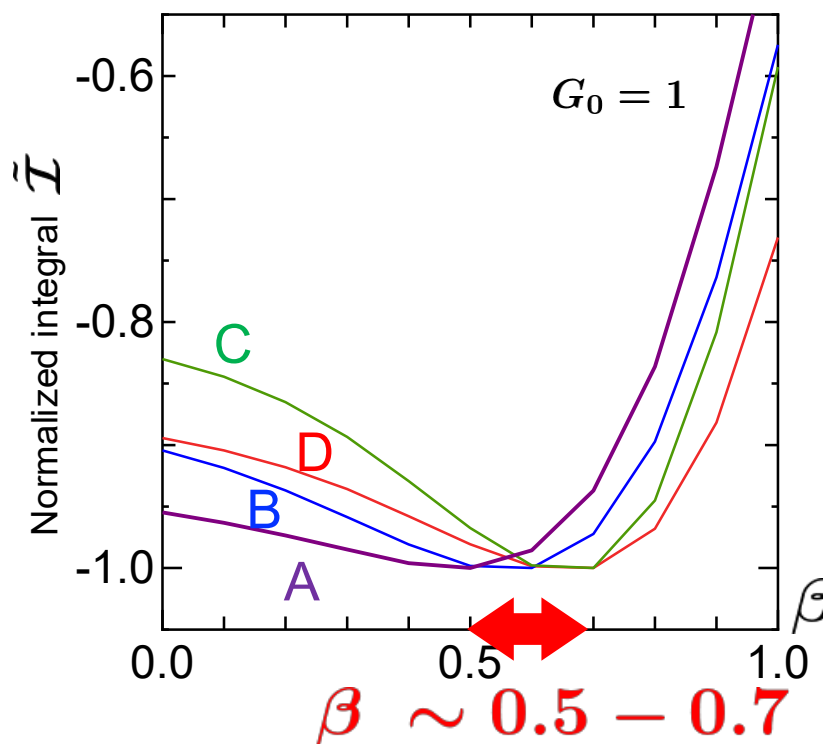
$0 < C_1 < 0.5$
$0 < C_2 < 1.25$
$0.35 < \alpha < 1.35$

- $\mathcal{I}$ が最小となる β を探索。

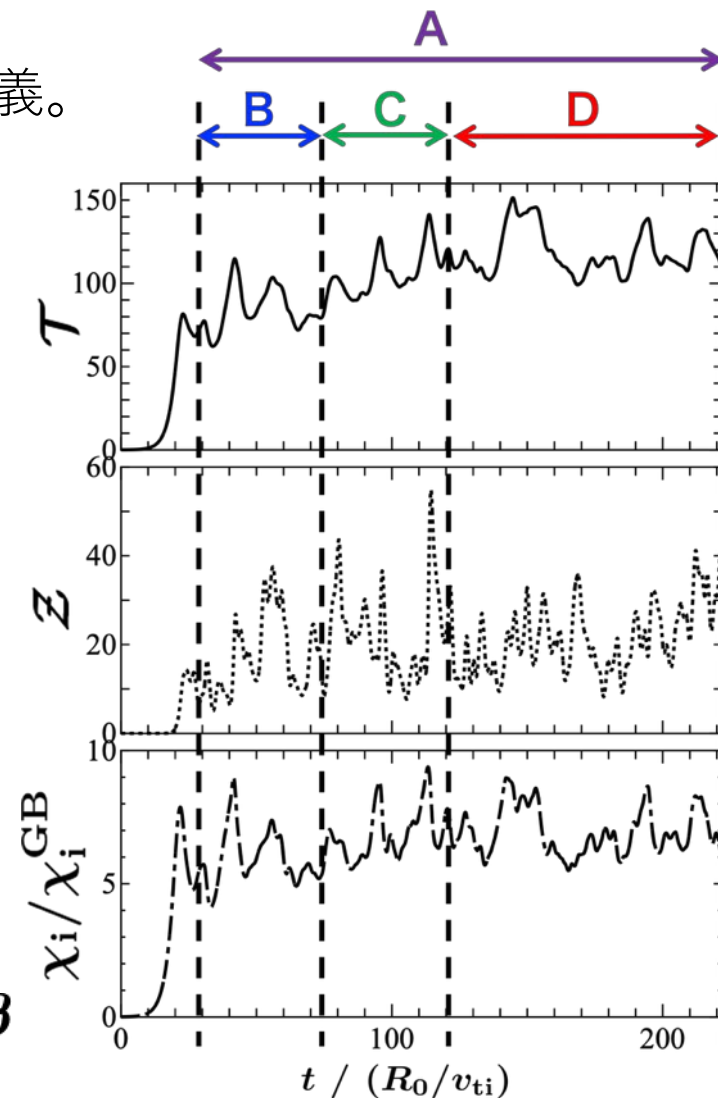
構造に基づく最適化

- $\mathcal{I}$ の最小値は、大域的最小値の場合と比べて回帰データ依存性が小さい。
- その結果、パラメータ β の許容範囲が狭小化。
- 構造の体積を最小化することで、最適なモデル形状を選択可能。

→ 最適点探索から、最適構造探索へ



M. Nunami, et al., PPCF (2025).



まとめと今後の展望

本研究で得られた知見

- プラズマ乱流輸送の解空間は、低次元の縮約空間上に制約されている可能性
- 縮約空間に基づく輸送モデルは、普遍性と外挿能力を備えていることが期待される
- 目的関数の多様体構造を利用することで、モデルパラメータを頑健に制約可能

今後の展望

解空間構造から有効力学系の構築へ

- 縮約解軌道を帰結する方程式系のモデリング

経験モデルから理論的理解へ

- 簡約輸送モデルの数理的構造の解明
- 散逸率上限などの普遍的制約との関連付け

解空間構造から有効ダイナミクスへ — その数理的基盤の解明を目指す